

C Toepffer

1967



DISPERSIONSEFFEKTE
IN DER EIGENKANALTHEORIE DER
ELEKTRONENSTREUUNG

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Johann - Wolfgang - Goethe - Universität

zu

Frankfurt am Main

Vorgelegt von

Christian Toepffer

aus

Breslau

Juni 1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545305_0018

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Frankfurt am Main.

Dekan:	Prof.Dr.J.Stauff
Leiter der Arbeit:	Prof.Dr.W.Greiner
Erstgutachter:	Prof.Dr.W.Greiner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. G. Süßmann

Tag der mündlichen Prüfung: 13.Juli 1967

Inhaltsübersicht

	Seite
I. Einleitung	1
II. Grundzüge der Eigenkanalmethode	4
III. Der Wirkungsquerschnitt	7
IV. Konstruktion der S-Matrix	
1) Konstruktion der Basiszustände	18
2) Diagonalisierung des Hamiltonoperators	26
V. Zusammenfassung	31
Anhang:	
A Die Diracgleichung im Zentralfeld	32
B Matrixelemente der elektro-magnetischen Wechselwirkung	40

Abstract

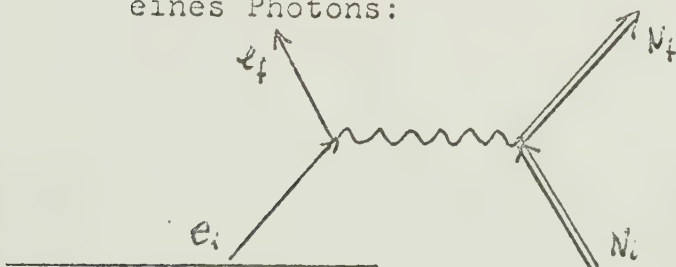
To study dispersive effects in electron scattering on nuclei the eigenchannel theory of Danos , Greiner, and Wahsweiler ^{7,8)} is proposed. The basic idea is the construction of a diagonal scattering matrix, which is an orthogonal transform of the physical S-matrix. The transformation matrix is given by the eigenvectors of the S-matrix and these are found together with its eigenvalues $\exp i\delta^\nu$, where δ^ν is the eigenphase in the ν -th eigenchannel, by a process of simultaneous diagonalisation of the S-matrix and the total Hamiltonian of the scattering problem. It is shown that for electron scattering the eigenphases and eigenvectors of the S-matrix can be found after a single diagonalisation for each eigenchannel, because there is only a small difference between the eigenphases and the potential scattering phases, due to the weakness of the interaction.

I. Einleitung

Zur Erforschung der Kernstruktur dient in hervorragendem Maß die Streuung hochenergetischer ($E \gtrsim 20$ MeV) Elektronen an Atomkernen. Der Wirkungsquerschnitt für die Elektronenstreuung hängt von den elektro-magnetischen Eigenschaften des Kerns^{+) und diese wiederum von der gesamten Wechselwirkung zwischen den Nukleonen ab. Da es nicht möglich ist, vom Wirkungsquerschnitt eindeutig auf die Kernstruktur zu schließen, geht man deshalb von einem Kernmodell mit gewissen freien Parametern aus, berechnet für dieses Modell die Wirkungsquerschnitte und bestimmt die freien Parameter durch Vergleich mit den experimentellen Wirkungsquerschnitten.}

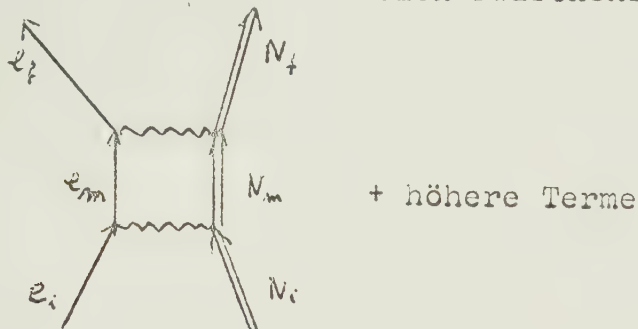
Ein solches Vorgehen ist nur dann gerechtfertigt, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- 1) Die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron muß genau bekannt sein. Dies ist mindestens bis zu Energien von einigen GeV der Fall.
- 2) Das Elektron muß exakt behandelt werden. Insbesondere müssen die Streuzustände des Elektrons unter Berücksichtigung des statischen Coulombfeldes nach Partialwellen (DWBA-Methode)¹⁻⁴⁾ zerlegt werden. Die Bornsche Näherung (BA), die mit ebenen Wellen arbeitet, kann zu unrealistischen Ergebnissen (Fig.1) führen, da ihre Voraussetzungen hier nicht erfüllt sind.
- 3) Der Wirkungsquerschnitt muß aus den Übergangsmatrixelementen in quantenmechanisch exakter Weise gewonnen werden. Bisher hat man sich hierbei auf die Störungstheorie 1.Ordnung beschränkt, d.h. auf Graphen mit dem Austausch eines Photons:



^{+) Die schwache Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron können wir hier vernachlässigen.}

Bei der Wechselwirkung zwischen Elektron und Kern sind natürlich auch Prozesse mit virtuellen Zwischenzuständen von der Art



möglich; man nennt in Anlehnung an die Optik die durch diese Graphen beschriebenen Prozesse Dispersionseffekte. Solche Effekte scheinen z.B. für die 5%-Differenz in den elastischen Wirkungsquerschnitten für Pb^{207} und Pb^{208} 9) verantwortlich zu sein, es ist deshalb sehr wünschenswert, sie zu berechnen.

Bei der Störungsrechnung 2.Ordnung muß nun sowohl über die Kernzwischenzustände summiert, wie über die Elektronenzwischenimpulse integriert werden, was auf große numerische Schwierigkeiten führt. Eine solche Rechnung ist deshalb bisher auch nur in Bornscher Näherung für die elastische Streuung an C^{12} und O^{16} vorgenommen worden⁵⁾. Zwar werden die unrealistischen Bornschen Minima im Wirkungsquerschnitt aufgefüllt, aber man kann nicht sagen, ob dies von den Dispersionseffekten oder von der Verbesserung der Elektronenwellenfunktion herrührt.

Aussichtsreicher ist die Methode der gekoppelten Kanäle. Zu dem gesamten Hamiltonoperator des Streuproblems gehört ein System von Differentialgleichungen, die durch die Wechselwirkung gekoppelt sind.

Die Lösung eines solchen Differentialgleichungssystems ist nicht einfach, Rawitscher⁶⁾ betrachtet deshalb bei der elastischen Streuung von 250 MeV Elektronen an Ca^{40} auch nur eine virtuelle Monopolanregung des Kerns, was ziemlich unrealistisch ist. Er erhält Abweichungen bis zu 5% vom Wirkungsquerschnitt und zwar an den Stellen, wo σ_{DWBA} Minima hat. (Pfeile in Fig.1)

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Methode zu finden, die die Berechnung von elastischen und inelastischen Elektronenstreuquerschnitten unter Berücksichtigung der Dispersionseffekte in exakter und physikalisch durchsichtiger Weise bei angemessenem

numerischen Aufwand gestattet.

Bei der Behandlung von Kernreaktionen hat die Eigenkanaltheorie von Danos, Greiner⁷⁾ und Wahsweiler⁸⁾ zu großen Erfolgen geführt. Unter einem Eigenkanal versteht man eine Superposition von gekoppelten physikalischen Kanälen mit einer gemeinsamen Phase- der Eigenphase-, so daß die Wellenfunktion im Eigenkanal sowohl den Hamiltonoperator wie auch die Streumatrix diagonalisiert. Aus der diagonalen S-Matrix und den Beimischungskoeffizienten der physikalischen Kanäle zu den Eigenkanälen findet man durch eine orthogonale Transformation die physikalische S-Matrix und damit die Wirkungsquerschnitte für die Streuung zwischen allen betrachteten physikalischen Kanälen.

Da in diesem Konstruktionsverfahren für die S-Matrix die Wechselwirkung zwischen den Kanälen in beliebig hoher Ordnung berücksichtigt werden kann, wollen wir in dieser Arbeit die Eigenkanaltheorie für die Elektronenstreuung formulieren.

Dazu referieren wir in Kapitel II kurz die Grundzüge der Eigenkanalmethode⁷⁾, in Kapitel III übertragen wir den Formalismus auf die Elektronenstreuung. An Hand einiger numerischer Beispiele zeigen wir schließlich in Kapitel IV, wie die S-Matrix für die Elektronenstreuung konstruiert werden kann, wesentlich neu ist dabei ein gegenüber den Kernreaktionen vereinfachtes Verfahren zur Auffindung der Eigenphasen. Die Ergebnisse werden in Kapitel V zusammengefaßt und im Hinblick auf eine praktische Rechnung diskutiert. Im Anhang A werden Formeln zur Diracgleichung, im Anhang B Formeln zur elektro-magnetischen Wechselwirkung und ihre Matrixelemente bereitgestellt.

II. Grundzüge der Eigenkanaltheorie

In Streuproblemen werden Lösungen des Hamiltonoperators

$$H = \underbrace{H_{\text{particle}} + H_{\text{target}}}_{H_0} + H_{\text{int}} \quad \text{II-1}$$

von der Form

$$\psi = \sum_c (A_c I_c + B_c O_c) \varphi_c \quad \text{II-2}$$

gesucht, wobei durch c die physikalischen Kanäle abgezählt werden. I_c und O_c bedeuten die ein- und auslaufenden Kugelwellen des gestreuten Teilchens und φ_c die Kanalwellenfunktion, d.h. die Gesamtwellenfunktion des Targets und den Winkel- und Spinanteil der Wellenfunktion des gestreuten Teilchens. Die S-Matrix transformiert die Amplituden der einlaufenden in die Amplituden der auslaufenden Welle:

$$B_c = - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} \quad \text{II-3}$$

Damit wird

$$\psi = \sum_c \left(A_c I_c - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} O_c \right) \varphi_c \quad \text{II-4}$$

Wir suchen nun solche Lösungen ψ^v , die nicht nur H , sondern auch S diagonalisieren. Es gilt dann für die S-Matrix die Eigenwertgleichung

$$\sum_{c'} S_{cc'} V_{c'}^v = e^{2i\delta^v} V_c^v \quad \text{II-5}$$

Die Phasen δ^ν nennt man Eigenphasen, die Eigenkanäle werden durch ν abgezählt. Die Wellenfunktion II-4 im ν -ten Eigenkanal lautet

$$\begin{aligned}\psi^\nu &= \sum_c V_c^\nu (I_c - e^{2i\delta^\nu} O_c) \varphi_c \\ &= e^{i\delta^\nu} \sum_c V_c^\nu (v_c)^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-i(k_c r + \chi_c + \delta^\nu - \frac{k\pi}{2})} - e^{i(k_c r + \chi_c + \delta^\nu - \frac{k\pi}{2})} \right) \varphi_c \\ &= -2ie^{i\delta^\nu} \sum_c V_c^\nu (v_c)^{-\frac{1}{2}} \sin(k_c r + \chi_c + \delta^\nu - \frac{k\pi}{2}) \varphi_c\end{aligned}\quad \text{II-6}$$

$\chi_c = \frac{Ze^2}{\hbar v_c} \ln 2k_c r$ ist eine bei Coulombproblemen auftretende logarithmische Phase (A - 26).

Der Eigenvektor ψ^ν der S-Matrix ist also eine Superposition stehender Wellen in allen offenen physikalischen Kanälen mit einer gemeinsamen Phase, der Eigenphase δ^ν . Hiervon ausgehend können wir die S-Matrix konstruieren: Wir unterteilen dazu den Phasenraum durch einen Abschneideradius R in einen Innen- und einen Außenbereich. R muß so groß sein, daß

- 1) H_{int} im Außenraum genügend klein ist.
- 2) Die Kernwellenfunktionen bereits im Innenraum genügend orthogonal sind.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so werden die Ergebnisse unabhängig von R; andererseits nimmt mit wachsendem R auch die Dichte der Zustände im Innenraum zu. Man geht nun folgendermaßen vor:

- 1) Durch die Einschußenergie E des Teilchen und die Anregungsenergien $E_{N,c}$ des Kerns sind die Wellenzahlen k_c des Teilchens in den verschiedenen physikalischen Kanälen gegeben.
- 2) Man gibt sich eine Phase δ^ν vor.
- 3) Die Komponenten der stehenden Welle II-6 legen damit bei R Randbedingungen für alle offenen physikalischen Kanäle c fest.
- 4) Man sucht innere Lösungen von H_0 , die diese Randbedingungen in allen offenen physikalischen Kanälen erfüllen.
- 5) Man diagonalisiert mit diesen Lösungen H und erhält Energien E^ν

die i.a. nicht mit E übereinstimmen.

- 6) Man ändert δ^v im Bereich $(0, \pi)$ und findet, daß gerade sooft der Fall $\hat{E}^v = E$ eintritt, wie offene Kanäle vorhanden sind. Durch die bei der Diagonalisierung anfallenden Eigenvektoren werden auch die Eigenvektoren der S-Matrix gegeben.
- 7) Durch Matrixinversion gewinnt man die gesamte S-Matrix:

$$S_{cc'} = \sum_v V_c^v e^{2i\delta^v} V_{c'}^v$$

II-7

Wir werden zeigen, daß für den Fall der ausschließlichen elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen Teilchen und Kern die Eigenphasen im wesentlichen durch die Phasen der reinen Potentialstreuung gegeben werden, wodurch sich das vorliegende Konstruktionschema und der numerische Aufwand erheblich vereinfachen.

III. Der Wirkungsquerschnitt

Wir wollen nun zeigen, wie man mit Hilfe der S-Matrix den Wirkungsquerschnitt erhält. Die Koeffizienten A_c in II-4 bestimmt man bekanntlich so, daß ψ im asymptotischen Bereich als Lösung von H_0 eine ebene Welle im Eingangskanal und auslaufende Kugelwellen beschreibt:

$$\psi = \sum_c [A_c (I_c - O_c) \varphi_c - \sum_{c'} A_{c'} (S_{cc'} - \delta_{cc'}) O_{c'} \varphi_{c'}] \quad \text{III-1-}$$

oder wenn man im 2. Term c und c' vertauscht:

$$\psi = \sum_c A_c [(I_c - O_c) \varphi_c - \sum_{c'} (S_{c'c} - \delta_{c'c}) O_{c'} \varphi_{c'}] \quad \text{III-1-}$$

Im Fall der Elektronenstreuung muß man also die ebene Elektronenwelle nach sphärischen Lösungen der Diracgleichung entwickeln. Außerhalb des Kernradius ist (A-1)

$$H_{el} = c \underline{\alpha} \underline{p} + \beta m c^2 - \frac{\xi}{r} \quad \text{III-2a}$$

mit $\xi = Ze^2 = \hbar c \alpha Z$. Wegen des Coulombpotentials ist das räumliche Verhalten der ebenen Welle nicht einfach $\exp i k z$ sondern

$$\tilde{\psi} \sim \exp i (k_z z - \gamma \ln k_z (r-z)) \quad , \quad \gamma = \frac{\xi W_k}{\hbar c p_k c} \quad \text{III-2b}$$

ist für große r Lösung von III-2abis zu Termen der Größenordnung r^{-2} 10). Wir haben dabei bereits die z -Richtung in die Einfallrichtung des Strahls gelegt. Der Index α soll die Elektronen

Energien W_α in den verschiedenen Kanälen abzählen. Mit α bezeichnen wir jeden verschiedenen Kernzustand. Wegen des Energiesatzes gilt:

$$W_\alpha = E - E_{N,\alpha}$$

III-3

wobei $E_{N,\alpha}$ die Anregungsenergie des Kerns ist.

Der zu H_{el} gehörige 4-er Spinor ist (A-5)

$$\chi_{el} = \left(\frac{W_\alpha + mc^2}{2W_\alpha v_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} |\frac{1}{2}\tau\rangle \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\alpha}{W_\alpha + mc^2} |\frac{1}{2}\tau\rangle \end{pmatrix} \exp i(k_\alpha z - y \ln k_\alpha(r-z))$$

III-4

Er ist auf die Stromdichte e normiert (A-7). $|\frac{1}{2}\tau\rangle$ sind die Paulischen Spinfunktionen. Der Spin-Winkelanteil der sphärischen Lösung ist (A-10)

$$\chi_k^\mu = \sum_\tau (\ell, \frac{1}{2}, \mu-\tau, \tau | j\mu) Y_{\ell, \mu-\tau}(\hat{r}) |\frac{1}{2}\tau\rangle$$

$$\chi_{-k}^\mu = \sum_\tau (\bar{\ell}, \frac{1}{2}, \mu-\tau, \tau | j\mu) Y_{\bar{\ell}, \mu-\tau}(\hat{r}) |\frac{1}{2}\tau\rangle$$

Für die ebene Coulombwelle III-2 gilt die Entwicklung

$$\exp i(k_\alpha z - y \ln k_\alpha(r-z)) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{k_\alpha} \sum_\ell i^\ell (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell 0}(\hat{r}) \cdot$$

III-5

$$\cdot \frac{1}{r} \sin(k_\alpha r + y \ln 2k_\alpha r - \frac{\ell}{2}\pi)$$

Damit werden die oberen Komponenten der ebenen Welle

$$\frac{1}{2}(1+\beta)\psi_{\alpha} = \left(\frac{W_{\alpha}+mc^2}{2W_{\alpha}v_{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h_{\alpha}} \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} i^{\ell} (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} (\ell, \frac{1}{2}, 0, \tau | j, \tau).$$

III-6

$$\cdot \chi_{\kappa}^{\tau} \cdot \frac{1}{r} \left[\exp -i(h_{\alpha} r + y \ln 2h_{\alpha} r - \frac{\ell}{2}\pi) - \exp i(h_{\alpha} r + y \ln 2h_{\alpha} r - \frac{\ell}{2}\pi) \right]$$

Für den Kern gilt

$$H_{\text{Kern}} |\alpha, j, v\rangle = E_{N, \alpha} |\alpha, j, v\rangle$$

Wir unterscheiden die angeregten Zustände des Kerns durch α , der Kernspin J ist deshalb ein redundanter Index, den wir nur dort explizit spezifizieren, wo er aus Drehimpulskopplungsgründen wirklich benötigt wird. v ist die Komponente von J in z -Richtung $v = \langle J_z \rangle$. Der erste Summand in III-1 lautet also in einem Kanal mit festem

α, v, τ :

$$\frac{1}{2}(1+\beta) \sum_c A_c (I_c - O_c) \psi_c = \left(\frac{W_{\alpha}+mc^2}{2W_{\alpha}v_{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{2}, \tau\right\rangle |\alpha, j, v\rangle \exp i(h_{\alpha} z - y \ln(h_{\alpha}(r-z)))$$

II-7

$$= \left(\frac{W_{\alpha}+mc^2}{2W_{\alpha}v_{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h_{\alpha}} \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} i^{\ell} (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} (\ell, \frac{1}{2}, 0, \tau | j, \tau) \chi_{\kappa}^{\tau} |\alpha, j, v\rangle \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\exp -i(h_{\alpha} r + y \ln 2h_{\alpha} r - \frac{\ell}{2}\pi) - \exp i(h_{\alpha} r + y \ln 2h_{\alpha} r - \frac{\ell}{2}\pi) \right]$$

Die ebene Welle ist also in dieser Darstellung durch die Quantenzahlen $\{\alpha, v, \tau\}$, die physikalischen Kanäle durch die Quantenzahlen $\{\alpha, v, \kappa, \tau = \langle J_z \rangle\}$ gekennzeichnet.

Die oberen Komponenten der ein- und auslaufenden Wellen sind (vgl. A-2

$$\frac{1}{2}(1+\beta) I_{\alpha\kappa} = \left(\frac{W_{\alpha} + mc^2}{2W_{\alpha} v_{\alpha}} \right) i \cdot \exp -i \left(k_{\alpha} r + \gamma \ln 2k_{\alpha} r - \frac{\ell\pi}{2} \right)$$

III-8

$$\frac{1}{2}(1+\beta) O_{\alpha\kappa} = \left(\frac{W_{\alpha} + mc^2}{2W_{\alpha} v_{\alpha}} \right) i \exp i \left(k_{\alpha} r + \gamma \ln 2k_{\alpha} r - \frac{\ell\pi}{2} \right)$$

die Kanalwellenfunktion

$$\frac{1}{2}(1+\beta) \psi_{\alpha, \nu, \kappa, \langle j_z \rangle} = \frac{1}{r} \chi_{\kappa}^{\langle j_z \rangle} | \alpha, j, \nu \rangle$$

III-9

Dann ist der Entwicklungskoeffizient

$$A_c = A_{\alpha, \kappa, \langle j_z \rangle, \tau} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{k_{\alpha}} i^{\ell} (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} \left(\ell, \frac{\tau}{2}, \langle j_z \rangle - \tau, \tau | j, \langle j_z \rangle \right) \quad \text{III-10}$$

Wir haben uns bisher nur mit den Lösungen der Diracgleichung zu positiver Energie und den oberen Komponenten dieser Lösungen befasst. In Wirklichkeit hat aber die ebene Welle III-7 $4 \cdot (2J+1)$ Komponenten, die auslaufenden Kugelwelle $4 \cdot (2J'+1)$ Komponenten. Die Streumatrix für eine Streuung $\alpha \rightarrow \alpha'$ hat entsprechend $4 \cdot (2J+1)$ Zeilen und $4 \cdot (2J'+1)$ Spalten¹⁾. Nun verbietet die Ladungserhaltung das Auftreten von Positronen in der auslaufenden Welle, wenn im Eingangskanal nur Elektronen vorhanden sind und umgekehrt. Die S-Matrix zerfällt daher in 2 Stufenmatrizen mit je $2 \cdot (2J'+1)$ Spalten und $2 \cdot (2J+1)$ Zeilen von denen die eine die Streuung von Elektronen, die andere die Streuung von Positronen beschreibt. Hat man es aber z.B. nur mit Wellenfunktionen zu positiver Energie zu tun, so genügt es, im asymptotischen Bereich nur die oberen Komponenten zu studieren, denn der asymptotische Hamiltonoperator

¹⁾ Die S-Matrix wird erst bei Kopplung von $\underline{j}$ und $\underline{J}$ zum Gesamtspin $\underline{I}$ quadratisch (III-30)

H_{el} zeigt uns, daß sich die unteren Komponenten durch Anwendung von $\frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{W_A + mc^2}$ aus den oberen berechnen lassen und somit eindeutig durch diese bestimmt sind.

Wir wollen das im folgenden eingehender untersuchen und folgen dabei im wesentlichen der Darstellung von Rose¹¹⁾.

Man betrachtet die Streuung aus einem Kanal $\{i\}$ mit der Elektronenenergie W_A in einen Kanal $\{f\}$ mit W_A und schreibt sich dazu III-1 in vereinfachter Form auf:

$$\psi = A \exp i(h_A z - y \ln h_A (r-z)) + \frac{B}{r} \exp i(h_A r + y \ln 2h_A r) \quad \text{III-11}$$

A ist ein $4 \cdot (2J+1)$ -komponentiger Vektor

B ist ein $4 \cdot (2J'+1)$ -komponentiger Vektor

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int B B^+ v_A d\xi \quad \text{III-12}$$

Die Integration ist über alle inneren Freiheitsgrade des Kerns zu erstrecken.

Aus den Komponenten der Amplituden A und B kann man die Dichtematrizen des Systems Elektron+Kern im Anfangs- und Endzustand als direkte Produkte konstruieren, und zwar ist:

$$(g_i)_{\sigma, \lambda} = v_A A_{\sigma} \cdot A_{\lambda}^* \quad \text{III-13a}$$

oder kurz

$$g_i = v_A A \times A^* \quad \text{III-13b}$$

und

$$g_f = N B \times B^* \quad \text{III-14}$$

N ist ein Normalisierungsfaktor, um $\text{Sp } g_f = 1$ zu erfüllen.

Nun ist

$$BB^* = S_p (B \times B^*) \quad \text{III-15}$$

und damit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N^{-1} v_{\alpha'} \quad \text{III-16}$$

wobei wir von jetzt ab die Integration über die Kernkoordinaten weglassen.

Man definiert nun durch

$$B = T A \left(\frac{v_{\alpha'}}{v_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{III-17}$$

eine Streumatrix T. Damit wird III-14

$$N^{-1} g_f = (TA) \times (TA)^* \frac{v_{\alpha'}}{v_{\alpha}} \quad \text{III-18}$$

oder mit III-13, III-16

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} g_f = T g_i T^+$$

bzw.

III-19

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = S_p (T g_i T^+)$$

Die Dichtematrizen haben folgende Gestalt

$$g_i = \frac{2W_{\alpha}}{W_{\alpha} + mc^2} P_i^+ \frac{1}{2}(1+\beta) g_{ci} \frac{1}{2}(1+\beta) P_i^+$$

III-20

$$g_f = \frac{2W_{\alpha'}}{W_{\alpha'} + mc^2} P_f^+ \frac{1}{2}(1+\beta) g_{cf} \frac{1}{2}(1+\beta) P_f^+$$

Die g_e sind die nicht-relativistischen Dichtematrizen; sie werden durch das direkte Produkt

$$S_0 = S_{\text{Elektron}} \times S_{\text{Kern}} = \frac{1}{2} (1 + \hat{P} \cdot \hat{\sigma}) \times \hat{S}_{\text{Kern}} \quad \text{III-21}$$

gegeben. $\hat{P}$ ist der Polarisationsvektor des Elektrons und die P^+ sind die Projektionsoperatoren für die Lösungen der Dirac-Gleichung zu positiver Energie

$$P^+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c \hat{p} + \beta mc^2}{W} \right) \times \mathbb{1} \quad \text{III-22}$$

$\mathbb{1}$ ist eine $(2J+1)$ dimensionale Einheitsmatrix, da P^+ nur auf die Elektronenwellenfunktionen wirken soll. Setzt man nun die Dichtematrizen in die Formel III-19 für den Wirkungsquerschnitt ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} S_{0f} = \tilde{T} S_{0i} \tilde{T}^+ \quad \text{III-23}$$

mit

$$\tilde{T} = 2 \left[\frac{W_a}{W_a + mc^2} \frac{W_{a'}}{W_{a'} + mc^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (1 + \beta) P_f^+ T P_a^+ \frac{1}{2} (1 + \beta) \quad \text{III-24}$$

Die $2 \cdot (2J_a + 1) \times 2(2J_f + 1)$ Matrix $\tilde{T}$ hat eine einfache physikalische Bedeutung. Da B eine Elektronenwelle beschreibt, gilt

$$B = P_f^+ B = P_f^+ T A \left(\frac{v_a}{v_{a'}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{III-25}$$

oder

$$\frac{1}{2}(1+\beta) B = \frac{1}{2}(1+\beta) P_+^+ T A \left(\frac{v_+}{v_+}\right)^{\frac{1}{2}}$$

III-26

Mit

$$P_+^+ \frac{1}{2}(1+\beta) P_+^+ = \frac{W + mc^2}{2W} P_+^+$$

kann man schreiben

$$\begin{aligned} A &= P_+^+ A = \frac{2W_+}{W_+ + mc^2} P_+^+ \frac{1}{2}(1+\beta) P_+^+ A \\ &= \frac{2W_+}{W_+ + mc^2} P_+^+ \left(\frac{1}{2}(1+\beta)\right)^2 A \end{aligned}$$

III-27

Einsetzen in III-26 ergibt

$$\frac{1}{2}(1+\beta) B = \left[\frac{2W_+}{W_+ + mc^2} \frac{1}{2}(1+\beta) P_+^+ T P_+^+ \frac{1}{2}(1+\beta) \right] \frac{1}{2}(1+\beta) A$$

oder nach Vergleich mit III-24

$$\left(\frac{2W_+ v_+}{W_+ + mc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(1+\beta) B = \tilde{T} \left(\frac{2W_+ v_+}{W_+ + mc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(1+\beta) A$$

III-28

d.h. $\tilde{T}$ transformiert (bis auf kinematische Faktoren) die oberen Komponenten der Amplituden.

Wir wollen uns nun die Wellenfunktion ψ für die Streuung $\{k\} \rightarrow \{k'\}$ genau aufschreiben und setzen dazu III-8, III-9 und III-10 in III-1b ein:

$$\begin{aligned} \psi &= \left(\frac{W_d + mc^2}{2W_d v_d} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, \tau \right\rangle \left| \alpha, J, v \right\rangle \exp i (k_z z - y \ln k_z (r-z)) \\ &\quad - \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{k_z} \sum_{\kappa} i^{\ell} (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} \left(\ell, \frac{1}{2}, 0, \tau \mid J, \tau \right) \sum_{\kappa', \mu', \nu'} \left(S_{\alpha', J', \nu', \kappa', \mu'; \alpha, J, v, \kappa, \tau} \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\alpha', J', \nu', \kappa', \mu'; \alpha, J, v, \kappa, \tau} \right) \varphi_{\alpha', J', \nu', \kappa', \mu'} O_{\alpha', \kappa'} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{W_d + mc^2}{2W_d v_d} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, \tau \right\rangle \left| \alpha, J, v \right\rangle \exp i (k_z z - y \ln k_z (r-z))$$

III-29

$$- \frac{i\pi^{\frac{1}{2}}}{k_z} \left(\frac{W_d + mc^2}{2W_d v_d} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} i^{(\ell-\ell')} (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} \left(\ell, \frac{1}{2}, 0, \tau \mid J, \tau \right)$$

$$\sum_{\kappa', \mu', \nu', \tau'} \left(S_{\alpha', J', \nu', \kappa', \mu'; \alpha, J, v, \kappa, \tau} - \delta_{\alpha', J', \nu', \kappa', \mu'; \alpha, J, v, \kappa, \tau} \right) \left(\ell', \frac{1}{2}, \mu', \tau' \mid J', \mu' \right)$$

$$Y_{\ell', \mu' - \tau'}(\hat{p}_{\alpha'}) \left| \frac{1}{2}, \tau' \right\rangle \left| \alpha', J', v' \right\rangle \frac{1}{r} \exp i (k_z r + y \ln 2k_z r)$$

Die Beobachtung der gestreuten Welle erfolgt in Richtung $\hat{p}_z$. Der Gesamtspin $\underline{I} = \underline{j} + \underline{J} = \underline{j}' + \underline{J}'$ und seine Komponente I_z in z-Richtung haben die guten Quantenzahlen I und M. Es ist deshalb praktisch, durch

$$S_{\alpha', J', \nu', \kappa', \mu'; \alpha, J, v, \kappa, \tau} = \sum_{I, M} (j, J, \tau, v \mid I, M) (j', J', \mu', v' \mid I, M)$$

III-30

$$\cdot \sum_{\alpha', J', \kappa', \mu'; \alpha, J, v, \kappa}^I$$

eine Streumatrix zum Gesamtspin I einzuführen; sie kann wegen der Drehinvarianz des Problems nicht von M abhängen¹²⁾.

Damit wird

$$\begin{aligned} \psi = & \left(\frac{W_u + mc^2}{2W_u v_u} \right)^{\frac{1}{2}} | \frac{1}{2}, \tau \rangle | \alpha, J, v \rangle \exp i (k_z z - y \ln k_z (r-z)) \\ & - \frac{i\pi^{\frac{1}{2}}}{k_z} \left(\frac{W_u + mc^2}{2W_u v_u} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{I, M, \kappa} i^{(\ell-\ell')} (\ell, \frac{1}{2}, 0, \tau | j, \tau) (j, J, \tau, v | I, M) (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

III-31

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa', \mu', v', \tau'} \left(S_{\ell', J', \kappa'; \alpha, J, \kappa}^I - \delta_{\ell', J', \kappa'; \alpha, J, \kappa} \right) (\ell', \frac{1}{2}, \mu' - \tau', \tau' | j', \mu') \\ & (j', J', \mu', v' | I, M) Y_{\ell', \mu' - \tau'} \left(\hat{p}_{\alpha} \right) | \frac{1}{2}, \tau' \rangle | \alpha', J', v' \rangle \cdot \frac{1}{r} \exp i (k_z r + y \ln 2k_z r) \end{aligned}$$

und wir erhalten für die Matrix $\tilde{T}$ (III-28)

$$\tilde{T}_{v', \tau'; v, \tau} = -\frac{i\pi^{\frac{1}{2}}}{k_z} \sum_{I, M, \kappa, \kappa', \mu'} i^{(\ell-\ell')} (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} (\ell, \frac{1}{2}, 0, \tau | j, \tau) (j, J, \tau, v | I, M)$$

III-32

$$(\ell', \frac{1}{2}, \mu' - \tau' | j', \mu') (j', J', \mu', v' | I, M) \left(S_{\ell', J', \kappa'; \alpha, J, \kappa}^I - \delta_{\ell', J', \kappa'; \alpha, J, \kappa} \right) Y_{\ell', \mu' - \tau'} \left(\hat{p}_{\alpha} \right)$$

Nehmen wir an, daß Kern und Elektron unpolarisiert sind, so gilt

$$P_{00} = \frac{1}{2(2J+1)} \cdot \mathbb{1}$$

III-33

und $\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda'} = \text{Sp}(\hat{T}_{\text{po}\lambda} \hat{T}^+)$ III-34

$$= \frac{\pi}{h^2} \frac{1}{2(2J+1)} \sum_{\nu, \tau, \nu', \tau'} \left| \sum_{I, M, \kappa, \kappa', \mu'} i^{(\ell-\ell')} (2\ell+1)^{\frac{1}{2}} (\ell, \frac{1}{2}, 0, \tau | j, \tau) \right.$$

$$\left. (j, J, \tau, \nu | I, M) (\ell', \frac{1}{2}, \mu'-\tau', \tau' | j', \mu') (j', J', \mu', \nu' | I, M) \right| \quad \text{III-35}$$

$$\left(S_{\ell', J', \kappa'; \ell, J, \kappa}^I - \int_{\ell', J', \kappa'; \ell, J, \kappa} \right) Y_{\ell', \mu'-\tau'}(\hat{p}_{\ell'}) \Big|^2$$

Beobachtet man den Streuwinkel nicht, so erhält man nach Integration über Ω :

$$\sigma_{\lambda \rightarrow \lambda'} = \frac{\pi}{h^2} \sum_{I, \kappa, \kappa'} \frac{2I+1}{2(2J+1)} \left| S_{\ell', J', \kappa'; \ell, J, \kappa}^I - \int_{\ell', J', \kappa'; \ell, J, \kappa} \right|^2 \quad \text{III-36}$$

IV. Konstruktion der S-Matrix

1. Konstruktion der Basiszustände

Man geht zunächst wie in Kapitel II vor und verschafft sich im Außenraum $r \geq R_a$, wo $H_{\text{int}} = 0$ ist, stehende Wellen mit der gleichen Phase $\delta^{I,\nu}$ in allen physikalischen Kanälen:

$$\psi^{I,\nu} = \sum_{\alpha,k} V_{\alpha,k}^{I,\nu} (I_{\alpha,k} - e^{2i\delta^{I,\nu}} O_{\alpha,k}) \psi_{\alpha,k}^I \quad \text{IV-1-1}$$

Wir haben dabei ausgenutzt, daß die S-Matrix reduzibel ist und in Teilmatrizen zum Gesamtspin I zerfällt (III-30). Da es auf $M = \langle I_z \rangle$ nicht ankommt, setzen wir $M = I$. Dann ist (III-8)

$$\psi_{\alpha,k}^I = \frac{1}{r} \sum_{\mu} (j, J, \mu, I - \mu | I, I) | \alpha, J, I - \mu \rangle \begin{pmatrix} \chi_k^{\mu} \\ \chi_{-k}^{\mu} \end{pmatrix} \quad \text{IV-1-2}$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{\mu, \tau} (j, J, \mu, I - \mu | I, I) \begin{pmatrix} (2, \frac{1}{2}, \mu - \tau, \tau | j, \mu) Y_{\ell, \mu - \tau}(\hat{r}) \\ (\bar{\ell}, \frac{1}{2}, \mu - \tau, \tau | j, \mu) Y_{\bar{\ell}, \mu - \tau}(\hat{r}) \end{pmatrix} | \frac{1}{2} \tau \rangle$$

Bei den Kugelwellen müssen wir beachten, daß wegen des statischen Coulombpotentials logarithmische Phasen auftreten. Wir setzen sie deshalb aus regulären und irregulären Coulombfunktionen (A-28) zusammen (Normierung wie in III-4). Es gilt außerhalb des Kerns (Fig. 2)

$$I_{\alpha,k} = \frac{1}{(2W_{\alpha} v_{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{(W_{\alpha} + mc^2)^{\frac{1}{2}}}{(W_{\alpha} - mc^2)^{\frac{1}{2}}} \right) (g - iF) e^{-i\omega} \quad \text{IV-1-3a}$$

$$= \frac{1}{(2W_{\alpha} v_{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{(W_{\alpha} + mc^2)^{\frac{1}{2}}}{(W_{\alpha} - mc^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{(2k_{\alpha} r)^{\gamma} e^{\frac{\pi\gamma}{2}} |\Gamma(\gamma + i\eta)|}{\Gamma(2\gamma + 1)}$$

$$\cdot \exp i(b_{\alpha} r - \eta - \omega)(\gamma - i\eta) \cdot F^{*}(\gamma + 1 + i\eta, 2\gamma + 1, 2ib_{\alpha} r)$$

$$O_{\alpha, \kappa} = \frac{1}{(\alpha W_{\alpha} v_{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} -(W_{\alpha} + mc^2)^{\frac{1}{2}} \\ (W_{\alpha} - mc^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \left(\mathcal{L} + i \mathcal{F} \right) e^{i\omega}$$

$$= \frac{1}{(2W_{\alpha} v_{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} -(W_{\alpha} + mc^2)^{\frac{1}{2}} \\ (W_{\alpha} - mc^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \frac{(2k_{\alpha} r)^x e^{\frac{\pi y}{2}} |\Gamma(y+iy)|}{\Gamma(2y+1)}$$

IV-1-4a

$$\exp -i(k_{\alpha} r - \eta - \omega)(y+iy) \cdot F(y+1+iy, 2y+1, 2ik_{\alpha} r)$$

mit $\omega = \arg \Gamma(y+iy) - \eta - \frac{1}{2} \pi y - \frac{\ell+1}{2} \pi$

IV-1-5

Weiter ist (A-24)

$$y = \frac{Z_{\alpha} W_{\alpha}}{p_{\alpha} c} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad y = +\sqrt{\kappa^2 - \xi^2}$$

$$\xi = Ze^2 \quad \exp 2i\eta = - \frac{\kappa - iy \frac{mc^2}{W_{\alpha}}}{y+iy}$$

Asymptotisch gilt bis auf Terme der Größenordnung $O((k_{\alpha} r)^{-1})$:

$$I_{\alpha, \kappa} \propto \frac{1}{(2W_{\alpha} v_{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} (W_{\alpha} + mc^2)^{\frac{1}{2}} \\ (W_{\alpha} - mc^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \exp -i(k_{\alpha} r + y \ln 2k_{\alpha} r - \frac{\ell+1}{2} \pi)$$

IV-1-3b

$$O_{\alpha, \kappa} \propto \frac{1}{(2W_{\alpha} v_{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} -(W_{\alpha} + mc^2)^{\frac{1}{2}} \\ (W_{\alpha} - mc^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \exp i(k_{\alpha} r + y \ln 2k_{\alpha} r - \frac{\ell+1}{2} \pi)$$

IV-1-4b

Für die stehende Welle IV-1-1 gilt dann

$$\begin{aligned} \psi^{I,\nu} &= e^{i\delta^{I,\nu}} \sum_{\alpha,k} V_{\alpha,k}^{I,\nu} (e^{-i\delta^{I,\nu}} I_{\alpha,k} - e^{i\delta^{I,\nu}} O_{\alpha,k}) \varphi_{\alpha,k}^I \\ &= 2e^{i\delta^{I,\nu}} \sum_{\alpha,k} V_{\alpha,k}^{I,\nu} (2W_\alpha v_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \text{IV-1-6a}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} (W_\alpha + mc^2)^{\frac{1}{2}} [\mathcal{G} \cos(\delta^{I,\nu} - \omega) - \mathcal{F} \sin(\delta^{I,\nu} - \omega)] \\ -i(W_\alpha - mc^2)^{\frac{1}{2}} [\mathcal{G} \sin(\delta^{I,\nu} - \omega) + \mathcal{F} \cos(\delta^{I,\nu} - \omega)] \end{pmatrix} \varphi_{\alpha,k}^I$$

$$= \sum_{\alpha,k} C_{\alpha,k}^{I,\nu} (v_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u_{\alpha,k} \\ i v_{\alpha,k} \end{pmatrix} \varphi_{\alpha,k}^I$$

Für Abschätzungen benutzen wir die Asymptotik

$$\psi^{I,\nu} = \sum_{\alpha,k} C_{\alpha,k}^{I,\nu} v_\alpha^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} (W_\alpha + mc^2)^{\frac{1}{2}} \cos(h_\alpha r + \gamma \ln 2h_\alpha r - \frac{\ell+1}{2}\pi + \delta^{I,\nu}) \\ -i(W_\alpha - mc^2)^{\frac{1}{2}} \sin(h_\alpha r + \gamma \ln 2h_\alpha r - \frac{\ell+1}{2}\pi + \delta^{I,\nu}) \end{pmatrix} \varphi_{\alpha,k}^I \quad \text{IV-1-6b}$$

Die Elektronenenergien W_α in den verschiedenen physikalischen Kanälen $\{\alpha\}$ werden gegeben durch

$$W_\alpha = E - E_{n,\alpha}$$

wobei $E = W_0$ die Einschußenergie des Elektrons und $E_{n,\alpha}$ die Anregungsenergie des Kerns im Kanal $\{\alpha\}$ ist.

Wir müssen nun diese Welle in den Innenraum $r < R_a$, wo die Wechselwirkung stattfindet, stetig fortsetzen, und durch geeignete Wahl der $\delta^{I,\nu}$ dafür sorgen, daß die gesamte Welle Lösung von H ist. Man entwickelt dazu die innere Lösung von H nach den inneren Lösungen von H_0 :

$$\psi^{I,\nu} = \sum_{\alpha,k,h} A_{\alpha,k,h}^{I,\nu} \hat{\phi}_{\alpha,k,h}^{I,\nu} \quad \text{IV-1-7}$$

(n ist eine zusätzliche Radialquantenzahl im Innenraum)

Ein Eigenkanal ist nun dadurch definiert, daß die zu IV-1-7 gehörige Energie $\hat{E}^{I,\nu} = E$ ist. Die Funktion

$$\tilde{\phi}_{\alpha,k,n}^{I,\nu} = \begin{pmatrix} u_{\alpha,k,n}^{\nu} \\ v_{\alpha,k,n}^{\nu} \end{pmatrix} \psi_{\alpha,k}^I \quad \text{IV-1-8}$$

beschreibt eine Lösung von H_0 im Innenraum zur Energie

$$\hat{E}_{\alpha,k,n}^{I,\nu} = E_{\alpha,k} + \hat{W}_{\alpha,k,n}^{I,\nu}$$

U und V sind Lösungen der radialen Diracgleichung⁺ (A-19)

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} u_{\alpha,k,n}^{\nu} \\ v_{\alpha,k,n}^{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{r} & \frac{\hat{W}_{\alpha,k,n}^{I,\nu} + mc^2 - V(r)}{\hbar c} \\ -\frac{\hat{W}_{\alpha,k,n}^{I,\nu} - mc^2 - V(r)}{\hbar c} & \frac{\kappa}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\alpha,k,n}^{\nu} \\ v_{\alpha,k,n}^{\nu} \end{pmatrix} \quad \text{IV-1-9}$$

Das Potential $V(r)$ gewinnt man mit Hilfe der Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 V(r) = 4\pi e \rho_0$$

aus der(modellabhängigen) Kernladungsverteilung⁺⁺). Für eine homogene Ladungsverteilung gilt z.B.

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{R_0} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_0^2} \right) & r \leq R_0 \\ -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{\xi}{r} & r > R_0 \end{cases} \quad R_0 = \text{Kernradius}$$

⁺) Da die S-Matrix in Teilmatrizen S^I zerfällt und Kanäle mit verschiedenem I nicht vermischt werden, spezifizieren wir in Zukunft I nur noch dort, wo es zum Verständnis der Formeln

⁺⁺) nötig ist.
Für verschiedene Anregungszustände des Kerns kann sich die Ladungsverteilung unterscheiden, so daß strenggenommen gilt $V(r) = V_n(r)$

Das Verhalten $V(r) = -\frac{\xi}{r}$ für $r \gtrsim R_0$ gilt für alle Kernmodelle, da alle sinnvollen Ladungsverteilungen für $r > R_0$ hinreichend stark gegen 0 gehen. Für $r \gtrsim R_0$ (Fig. 2) sind daher U und V gleich den Coulomblösungen (A-23) mit einer zusätzlichen Phase $\tilde{\tau}$, die die Abweichung von $V(r)$ gegenüber $-\frac{\xi}{r}$ für $r \leq R_0$ berücksichtigt.

$$U_{\alpha, k, n}^v = \frac{(\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v + mc^2)^{\frac{1}{2}} (2 \tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r)^{\gamma} e^{\frac{\pi \tilde{\gamma}}{2}} |\Gamma(\gamma + i \tilde{\gamma})|}{(\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v R)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\gamma + 1)}$$

$$\cdot \operatorname{Re} \left[\exp -i(\tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r - \tilde{\eta} - \tilde{\tau})(\tilde{\gamma} + i \tilde{\gamma}) F(\gamma + 1 + i \tilde{\gamma}, 2\gamma + 1, 2i \tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r) \right]$$

$$V_{\alpha, k, n}^v = - \frac{(\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v - mc^2)^{\frac{1}{2}} (2 \tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r)^{\gamma} e^{\frac{\pi \tilde{\gamma}}{2}} |\Gamma(\gamma + i \tilde{\gamma})|}{(\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v R)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\gamma + 1)}$$

IV-1-10

$$\operatorname{Im} \left[\exp -i(\tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r - \tilde{\eta} - \tilde{\tau})(\tilde{\gamma} + i \tilde{\gamma}) F(\gamma + 1 + i \tilde{\gamma}, 2\gamma + 1, 2i \tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r) \right]$$

$F(a, b, c)$ ist die konfluente hypergeometrische Funktion und die Tilde bedeutet, daß die Größen $\tilde{k}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\eta}$ und $\tilde{\tau}$ (A-24) mit der Energie $\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v$ zu bilden sind. Die Normierung ist

$$\int_0^R dr \left(U_{\alpha, k, n}^{v^2} + V_{\alpha, k, n}^{v^2} \right) = 1$$

IV-1-11

Für große r benutzen wir die Asymptotik (A-25) dieser Funktionen

$$U_{\alpha, k, n}^v = \left(\frac{\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v + mc^2}{\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v R} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r + \tilde{\delta}_{\alpha, k, n}^v)$$

IV-1-12a

$$V_{\alpha, k, n}^v = - \left(\frac{\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v - mc^2}{\tilde{W}_{\alpha, k, n}^v R} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\tilde{h}_{\alpha, k, n}^v r + \tilde{\delta}_{\alpha, k, n}^v)$$

mit $\hat{\delta}_{\lambda, \kappa, n}^v = \hat{\delta}_c + \hat{\tau}$

$$= \hat{\gamma} \ln 2 \hat{h}_{\lambda, \kappa, n}^v R - \arg \Gamma(\gamma + i \hat{\gamma}) + \hat{\gamma} - \frac{1}{2} \pi \gamma + \hat{\tau} \quad \text{IV-1-12b}$$

Stetigkeit der Lösungen bei R bedeutet, daß die Randbedingung

$$\left. \frac{u_{\lambda, \kappa}}{v_{\lambda, \kappa}} \right|_R = \left. \frac{u_{\lambda, \kappa, n}^v}{v_{\lambda, \kappa, n}^v} \right|_R \quad \text{IV-1-13a}$$

oder bei vernachlässigter Ruhemasse des Elektrons

$$\tan(h_\lambda R + \gamma \ln 2 h_\lambda R - \frac{\ell+1}{2} \pi + \delta^v) = \tan(\hat{h}_{\lambda, \kappa, n}^v R + \hat{\delta}_{\lambda, \kappa, n}^v) \quad \text{IV-1-13b}$$

erfüllt sein muß.⁺⁾ Sie legt uns die inneren Wellenzahlen $\hat{h}_{\lambda, \kappa, n}^v$ bzw. $\hat{W}_{\lambda, \kappa, n}^v$ fest. Wir sehen, wie die inneren Parameter von den Kanälen $\{\lambda, \kappa\}$ und der Eigenphase δ^v abhängen. Um die Zustandsdichte innen gering zu halten, ist es vorteilhaft R klein zu wählen, andererseits muß R so groß sein, daß

- 1) H_{int} im Außenraum hinreichend klein sind
- 2) die Kernwellenfunktionen (bzw. im Teilchen-Loch Modell die Loch-Funktionen) bereits im Innenraum orthogonal sind. Da sie für $r \geq R_0$ exponentiell abfallen, ist diese Bedingung leicht zu erfüllen. Dann sorgen die Kernwellenfunktionen unabhängig von R für die Orthogonalität der $\hat{\Phi}_{\lambda, \kappa, n}^v$

Wegen der unendlichen Reichweite der elektro-magnetischen Wechselwirkung wird 1) schwerer zu erfüllen sein als 2). Bei der inelastischen Elektronenstreuung⁴⁾ hat sich gezeigt, daß bei

^{+) Wir haben dabei die Asymptotik der Wellenfunktionen benutzt. Wegen $\hbar R \approx 30$ bei $E=200$ MeV und $R = 30$ fm reicht das für Abschätzungen aus.}

$E = 200 \text{ MeV}$ $R = 30 \text{ fm}$ ein Wert für den Abschneideradius ist, bei dem die Übergangsmatrixelemente hinreichend genau erhalten werden. Wir werden diese Werte in Zukunft für numerische Beispiele zugrunde legen.

Eine Lösung von IV-1-13 ist offensichtlich

$$\hat{h}_{\ell, k, 0}^v = h_\ell$$

und

$$\delta^v = \hat{\delta}_{\ell, k, 0}^v - y \ln 2h_\ell R + \frac{\ell+1}{2} \pi$$

IV-1-14

$$= \eta + i - \arg \Gamma(y + iy) - \frac{1}{2} \pi y + \frac{\ell+1}{2} \pi$$

$$= \delta_{\ell, k}^{\text{pot}}$$

Dieser Fall entspricht genau der Potentialstreuung, die Eigenphase ist gleich der Potentialphase; bei $H_{\text{int}} \equiv 0$ ist $\hat{\phi}_{\ell, k, 0}^v$ die exakte Lösung von H; die Eigenkanäle sind gleich den physikalischen Kanälen.

Die Energiedifferenz zwischen zwei benachbarten Zuständen mit

$$\hat{W}_{\ell, k, n}^v \quad | \quad \hat{W}_{\ell, k, n+1}^v \quad \text{wird durch}$$

$$(\hat{h}_{\ell, k, n}^v - \hat{h}_{\ell, k, n+1}^v) R = \pi$$

gegeben und ist etwa

IV-1-15

$$\hat{W}_{\ell, k, n}^v - \hat{W}_{\ell, k, n+1}^v \approx 20 \text{ MeV}$$

Diese Energiedifferenz ist, wie wir später noch sehen werden, so groß, daß wir für die Diagonalisierung nur die Zustände mit $n=0$ zu betrachten brauchen⁺⁾ .

Bei der Abschätzung haben wir ausgenutzt, daß sich die Phasen $\delta_{\ell, k}^{\text{pot}}$ sehr viel langsamer mit der Energie ändern als die Wellenzahlen. (Tab.1)

⁺⁾ Wir lassen den Index n deshalb von jetzt an weg.

Wir indizieren den durch IV-1-14 nach innen fortgesetzten Kanal mit $\{\alpha_\nu, \kappa_\nu\}$, die übrigen physikalischen Kanäle, die bei $H_{\text{int}} \neq 0$ zur stehenden Welle IV-1-4 beitragen, mit $\{\alpha_\mu, \kappa_\mu\}$

Mit den durch die Randbedingung IV-1-14 erhaltenen Basiszuständen $\tilde{\phi}_{\alpha, \kappa}^\nu$ können wir nun die Lösung des gesamten Hamiltonoperators H unter Berücksichtigung der dynamischen Wechselwirkung H_{int} durch Diagonalisierung von H konstruieren. Man erhält die Energien $\hat{E}^\nu$ und die Beimischungskoeffizienten $A_{\nu, \kappa}^\nu$. Sodann muß noch durch Variation der δ^ν die Bedingung $\hat{E}^\nu = E$ erfüllt werden. Wir werden zeigen, daß sich wegen der besonderen Eigenschaften der elektro-magnetischen Wechselwirkung die Eigenphasen nur wenig von den Potentialphasen unterscheiden.

2. Diagonalisierung des Hamiltonoperators

Die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron ist

$$H_{int} = \int d\tau_N \left(\rho_N \phi_e^{ret}(\vec{r}_N) - \frac{1}{c} \vec{j}_N \cdot \vec{A}_e^{ret}(\vec{r}_N) \right)$$

wobei ϕ_e^{ret} und $\vec{A}_e^{ret}$, die durch das Elektron am Kernort erzeugten retardierten Potentiale sind.

Die Matrixelemente von H_{int} berechnet man, indem man H_{int} nach Multipolen entwickelt und die Wellenfunktionen ϕ (IV-1-7) einsetzt. Dies ist im Anhang B durchgeführt.

Da wir die statische Ladungsverteilung bereits in H_{el} berücksichtigt haben, beschreibt H_{int} nur dynamische Prozesse, es hat deshalb keine Diagonalelemente.

Wir schätzen nun die Größenordnung der nichtdiagonalen Matrixelemente ab. Sicher ist, daß diese Matrixelemente klein gegen E sind, denn wir wissen, daß inelastische Wirkungsquerschnitte für Elektronenstreuung um Zehnerpotenzen kleiner sind als elastische.

Wir betrachten einen $E\lambda$ -Übergang vom Grundzustand eines mittelschweren sphärischen g-g Kerns ($Z=26$) in einen λ^+ Vibrationszustand, wo bei wir für den Kern das Tröpfchenmodell zugrundelegen¹³⁾. Dann gilt bei vernachlässigter Retardierung (B-21)

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = -e^2 \frac{4\pi}{2\lambda+1} \int d\tau_N \int_0^R dr^2 (u_f u_i + v_f v_i)$$

IV-2-1

$$\frac{r_{<}^\lambda}{r_{>}^{\lambda+1}} \langle f | \rho_N | i \rangle_{rad}$$

wobei wir die Winkelanteile 1 gesetzt haben.

Wegen

$$\langle f | g_N | i \rangle_{rad} = g_0 \frac{\beta_0}{\sqrt{5}} R_0 \delta(R_0 - r_N) \quad \text{IV-2-2}$$

$$g_0 = \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} \quad \beta_0 = \left(\frac{5\hbar}{2(C_\lambda B_\lambda)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.25 \quad \text{für } \lambda=2 \quad \text{IV-2-3}$$

ist

$$\begin{aligned} |\langle f | H_{int} | i \rangle| &= \frac{4\pi e^2}{2\lambda+1} g_0 \frac{\beta_0}{\sqrt{5}} R_0 \int_0^{R_0} dr (u_f u_i + v_f v_i) \frac{r^\lambda}{R_0^{\lambda+1}} \\ &\quad + \int_{R_0}^R dr (u_f u_i + v_f v_i) \frac{R_0^{\lambda+2}}{r^{\lambda+1}} \end{aligned} \quad \text{IV-2-4}$$

Eine obere Grenze für den Wert dieses Matrixelementes erhalten wir, wenn sich die Elektronenwellenfunktionen vollständig überlappen. Dann wird (IV-1-11)

$$u_f u_i + v_f v_i = \frac{1}{R}$$

und man kann die Integration leicht ausführen. Es gilt:

$$|\langle f | H_{int} | i \rangle| \lesssim \frac{3e^2 Z \beta_0}{\sqrt{5} \lambda(\lambda+1) R} \approx 0.1 \text{ MeV für } \lambda=2$$

Die exakten Werte für solche Matrixelemente für einen Quadrupolübergang sind in Tab.II für Energien $W_0 = 200 \text{ MeV}$ und $W_1 = 195 \text{ MeV}$ tabelliert.

Wir können nun S folgendermaßen konstruieren:

- 1) Wir berechnen durch numerische Integration der Diracgleichung IV-1-8 die Phasen $\delta_{\alpha, \kappa}^{\text{pot}}$
- 2) Wir setzen $\delta^{\nu} = \delta_{\alpha, \kappa}^{\text{pot}}$, d.h. der ν -te Eigenkanal ist gleich dem physikalischen Kanal $\{\alpha, \kappa\}$ und berechnen mit (IV-1-13)

$$\tilde{h}_{\alpha, \kappa}^{\nu} R + \tilde{y} \ln 2 \tilde{h}_{\alpha, \kappa}^{\nu} R - \frac{\ell+1}{2} \pi + \tilde{\delta}_{\alpha, \kappa}^{\text{pot}}$$

IV-2-5

$$= h_{\alpha, \kappa} R + y \ln 2 h_{\alpha, \kappa} R - \frac{\ell+1}{2} \pi + \delta_{\alpha, \kappa}^{\text{pot}}$$

die inneren Energien $\tilde{W}_{\alpha, \kappa}^{\nu}$ und die Wellenfunktionen $\tilde{\Phi}_{\alpha, \kappa}^{\nu}$. Da sich die Potentialphasen nur sehr wenig mit κ und fast gar nicht mit der Energie ändern (Tab.I), sind die Energien $\tilde{W}_{\alpha, \kappa}^{\nu}$ bzw. $\tilde{E}_{\alpha, \kappa}^{\nu} = \tilde{W}_{\alpha, \kappa}^{\nu} + E_{N, \alpha}$ fast entartet.

- 3) Mit diesen Wellen diagonalisieren wir H und erhalten die Beimischungskoeffizienten $A_{\alpha, \kappa}^{\nu}$ und die Energien $\hat{E}^{\nu}$.
- 4) $|\hat{E}^{\nu} - E|$ wird von der Größenordnung von $|\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle| \lesssim 0.1 \text{ MeV}$ sein. Wir müssen die Eigenphasen um

$$\Delta \delta^{\nu} = \delta^{\nu} - \delta_{\alpha, \kappa}^{\text{pot}} = \left(\frac{\hat{E}^{\nu} - E}{\hbar c} \right) R \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$$

IV-2-6

renormieren.

- 5) Wie wirkt sich diese Phasenrenormierung auf die Energiematrix, ihre Eigenwerte und Eigenvektoren aus?

Aus der Anschlußbedingung IV-1-13 und der Tatsache, daß sich die Phasen nur langsam mit der Energie ändern, schließen wir, daß sich die Diagonalelemente sämtlich um $\hat{E}^{\nu} - E$ ändern, wenn sich die Eigenphase um $\Delta \delta^{\nu}$ ändert. Da sich die nichtdiagonalen Matrixelemente nur schwach mit der Energie ändern (Tab.2) stellen wir

fest, daß die Renormierung der Eigenphase IV-2-6 bedeutet, daß das $(\hat{E}^v - E)$ -fache der Einheitsmatrix zu der in Punkt 3. diagonalisierten Energiematrix addiert wird. D.h.

a) die in IV-2-6 angegebenen Phasen δ^v sind tatsächlich die Eigenphasen, denn es gilt $\hat{E}^v = E$

b) die Beimischungskoeffizienten sind die in Punkt 3 berechneten $A_{\lambda, \kappa}^v$

Es genügt also, in jedem Eigenkanal nur eine Diagonalisierung bei der Phase $\delta_{\lambda, \kappa}^{pot}$ vorzunehmen.

Wir überlegen uns noch, wie groß die Matrizen werden, die man für eine exakte Berücksichtigung der Dispersionseffekte berücksichtigen muß. Bei den betrachteten mittelschweren, sphärischen g-g Kernen werden im wesentlichen angeregt:

Von den Vibrationszuständen:

Der 2^+ Einphononenzustand

das $0^+, 2^+, 4^+$ Zweiphononentriplett

der 3^- Oktupolvibrationszustand

sowie die 1^- Riesenresonanz.

Bei festem $I > J_{\max}$ können folgende Wellenfunktionen mischen:

$J^\pm$	0^+	2^+	0^+	2^+	4^+	3^-	1^-
λ	0	1	2	3	4	5	6
$j = k - \frac{1}{2}$		I-2		I-2	I-4	I-3	
		I-1		I-1	.	.	I-1
	I	I	I	I	I	I	I
		I+1		I+1	I+1	I+1	I+1
		I+2		I+2	.	I+3	
					I+4		

Beachten wir noch, daß H_{int} die Gesamtparität $\Pi = \Pi_{\text{Kern}} \cdot \Pi_{\text{el}}$ erhält, so ist $l = j \pm 1/2$ durch die Parität festgelegt. Man erhält also in diesem Fall 31 Basisfunktionen.

Zur Berechnung der S-Matrix braucht man die äußeren Beimischungskoeffizienten. Wir haben die Wellenfunktionen $\gamma^{\lambda, \kappa, v}$ so konstruiert

daß gilt

$$\psi^{I,\nu} |_R = \sum_{\alpha, \kappa} A_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} \hat{\phi}_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} |_R = \sum_{\alpha, \kappa} A_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} \left(\begin{array}{c} u_{\alpha, \kappa}^\nu \\ i v_{\alpha, \kappa}^\nu \end{array} \right) \Big|_R \psi_{\alpha, \kappa}^I$$

IV-2-7

$$\stackrel{!}{=} \psi^{I,\nu} |_R = \sum_{\alpha, \kappa} C_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} v_{\alpha}^{-\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{c} u_{\alpha, \kappa} \\ i v_{\alpha, \kappa} \end{array} \right) \Big|_R \psi_{\alpha, \kappa}^I$$

Durch Projektion auf $\psi_{\alpha', \kappa'}^I$ kann man die $C_{\alpha, \kappa}^{I,\nu}$ aus

$$A_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} u_{\alpha, \kappa}^\nu |_R = C_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} v_{\alpha}^{-\frac{1}{2}} u_{\alpha, \kappa} |_R$$

IV-2-8

berechnen. Mit den normalisierten Koeffizienten

$$C_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} \longrightarrow \frac{C_{\alpha, \kappa}^{I,\nu}}{\mathcal{N}}, \quad \mathcal{N} = \sum_{\alpha, \kappa} |C_{\alpha, \kappa}^{I,\nu}|^2$$

IV-2-9

und den Eigenphasen $\delta^{I,\nu}$ kann man die S-Matrix berechnen (II-7)

$$S_{\alpha, \kappa; \alpha', \kappa'}^I = \sum_{\nu} C_{\alpha, \kappa}^{I,\nu} e^{2i\delta^{I,\nu}} C_{\alpha', \kappa'}^{I,\nu}$$

IV-2-10

V. Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, daß es aussichtsreich ist, die Eigenkanalmethode auf die Elektronenstreuung anzuwenden, um die Dispersions - effekte auszurechnen. Da zu jedem physikalischen Kanal ein Eigenkanal gehört und zur Berechnung dieses Eigenkanals eine Diagonalisierung mit allen physikalischen Kanälen nötig ist, wird der numerische Aufwand N -fach gegenüber der DWBA Methode sein, wenn N die Zahl der Kanäle ist, die zum Gesamtdrehimpuls I und zu definiter Parität zusammengekoppelt werden. Die meiste Zeit wird die Berechnung der Matrixelemente beanspruchen, dabei kann weitgehend auf die Programme der Partialwellenmethode zurückgegriffen werden. N hängt von der Zahl der betrachteten Kernzustände ab, zur Erprobung der Theorie erscheint es deshalb vorteilhaft, zunächst die Streuung an sphärischen g - g Kernen zu betrachten, um Rotations- und Einteilchenzustände vernachlässigen zu können.

In der Eigenkanaltheorie werden sämtliche Streukanäle gleichmäßig behandelt, das benutzte Kernmodell muß deshalb sämtliche Streudaten simultan erklären können. Diese Forderung ist nicht trivial, wenn man bedenkt, daß (besonders auf dem Gebiet der optischen Potentiale), verschiedene Kernmodelle herangezogen werden, um Wirkungsquerschnitte für Streuungen zwischen verschiedenen Kanälen an demselben Kern an die experimentellen Werte anzupassen. Die Eigenkanaltheorie ist daher eine adäquate Methode zum Test von mikroskopischen Kernmodellen mit Hilfe der Elektronenstreuung. Zur Erprobung der Methode beabsichtigen wir allerdings zunächst Rechnungen mit dem Kollektivmodell des Kerns auszuführen.

Wir stellen weiter fest, daß viele Überlegungen und Abschätzungen in dieser Arbeit nur auf den Eigenschaften der elektro-magnetischen Wechselwirkung beruhen. Es erscheint deshalb aussichtsreich zu prüfen, inwieweit die Eigenkanaltheorie auch auf andere Streuvorgänge, bei denen nur elektro-magnetische Wechselwirkung vorhanden ist - z.B. auf die Coulombanregung - angewandt werden kann.

Anhang A

Die Diracgleichung im Zentralfeld¹¹⁾

Die Diracgleichung

$$(\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + \beta mc^2 + V(\underline{r})) \psi = W \psi \quad \text{A-1}$$

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{A-2}$$

wobei $\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ die Paulischen Spinmatrizen, und 1 eine 2x2 Einheitsmatrix bedeuten, hat im kräftefreien Fall die ebenen Wellen als Lösung : Mit

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} \quad \hbar \underline{k} = \underline{p}$$

ist

$$c \underline{\sigma} \cdot \underline{p} u = (W + mc^2) v \quad \text{A-3}$$

$$c \underline{\sigma} \cdot \underline{p} v = (W - mc^2) u$$

Durch Elimination von u bzw. v in A-3 findet man, daß folgende Lösung je zweimal auftreten:

$$W_+ = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad \text{A-4a}$$

$$W_- = -(p^2 c^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad \text{A-4b}$$

Die Lösungen zu W_- beschreiben Elektronen negativer Energie, oder äquivalent Positronen positiver kinetischer Energie (Dirac-sche Löchertheorie). Wir wollen uns im folgenden nur mit den Elektronenlösungen positiver Energie $W_+ = W$ beschäftigen. Es existieren zwei Lösungen

$$\psi^m = \left(\frac{W + mc^2}{2W} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi^m \\ \frac{\underline{\sigma} \cdot \underline{p} c}{W + mc^2} \chi^m \end{pmatrix} \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}) \quad \text{A-5}$$

Sie sind Eigenfunktionen des relativistischen Spinoperators $\hat{\sigma}_z$:

$$\hat{\sigma}_z \psi^{\pm \frac{1}{2}} = \pm \psi^{\pm \frac{1}{2}}$$

$$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x \hat{p}_x) \hat{p}_x + \beta (\hat{\sigma}_x \hat{e}_1) \hat{e}_1 + \beta (\hat{\sigma}_x \hat{e}_2) \hat{e}_2$$

A-6

$\hat{e}_1, \hat{e}_2$ und $\hat{p}$ sind die Basisvektoren eines rechtshändigen Koordinatensystems.

Die ebenen Wellen A-5 sind so normiert, daß für den Strom

$$\hat{j} = ec \psi^\dagger \hat{\alpha} \psi = ec^2 \frac{P}{W} = e \hat{v}$$

A-7

gilt, wobei $v = \frac{dW}{dP}$ die Geschwindigkeit des Elektrons ist.

Mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} &= \hat{r} (\hat{r} \cdot \hat{\nabla}) - \hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{\nabla}) \\ &= \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{\hbar} \hat{r} \times \hat{L} \end{aligned}$$

wobei $\hat{L} = -i\hbar \hat{r} \times \hat{\nabla}$ der Bahndrehimpulsoperator ist, können wir A-1 auf polare Form bringen. Die kinetische Energie wird

$$c \hat{\alpha} p = -i\hbar c \alpha_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{c}{r} \hat{\alpha} (\hat{r} \times \hat{L})$$

oder mit

$$\hat{\sigma}_r \hat{\sigma} \cdot \hat{L} = i \hat{\sigma} (\hat{r} \times \hat{L})$$

$$c \hat{\alpha} p = -i\hbar c \alpha_r \frac{\partial}{\partial r} + i c \frac{\alpha_r}{r} \hat{\sigma} \cdot \hat{L}$$

Mit

$$\underline{\alpha} = -\gamma_5 \underline{\sigma} \quad , \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und dem Spin-Bahnkopplungsoperator

$$K = \beta (\underline{\sigma} \underline{\ell} + \hbar)$$

A-8

wird dann die Diracgleichung

$$H\psi = \left[i c \gamma_5 \sigma_r \left(\hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\beta}{r} K \right) + V + \beta m c^2 \right] \psi = W\psi \quad \text{A-9}$$

Für $V \equiv V(r)$ kommutieren j^2 , j_z und K mit H . Ihre Eigenwerte sind $j(j+1)\hbar^2$, $\mu\hbar$ und $-\kappa\hbar$. Mit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^u \\ \psi^l \end{pmatrix}$$

wird

$$\begin{aligned} (\underline{\sigma} \underline{\ell} + \hbar) \psi^u &= -\kappa\hbar \psi^u \\ (\underline{\sigma} \underline{\ell} + \hbar) \psi^l &= \kappa\hbar \psi^l \end{aligned}$$

Man separiert ψ in

$$\psi = \psi_\kappa^u = \begin{pmatrix} g(r) \chi_\kappa^u \\ i f(r) \chi_{-\kappa}^u \end{pmatrix}$$

Die Spin-Winkelfunktionen sind

$$\begin{aligned} \chi_\kappa^u &= \sum_{\tau} (\ell, \frac{1}{2}, \mu-\tau, \tau | j, \mu) Y_{\ell, \mu-\tau}(\hat{r}) \chi^\tau \\ \chi_{-\kappa}^u &= \sum_{\tau} (\bar{\ell}, \frac{1}{2}, \mu-\tau, \tau | j, \mu) Y_{\bar{\ell}, \mu-\tau}(\hat{r}) \chi^\tau \end{aligned}$$

A-10

Dabei gelten für κ, j und l die Beziehungen

$$k = \begin{matrix} l \\ -l-1 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} j = l - \frac{1}{2} \\ j = l + \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{A-11}$$

$$j = l - \frac{1}{2}, \quad l = |\kappa| \quad \text{A-12}$$

$$l = \begin{matrix} \kappa \\ -\kappa-1 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \kappa > 0 \\ \kappa < 0 \end{matrix} \quad \text{A-13}$$

Außerdem führt man ein: $\bar{l} = l_{-\kappa}$
es gilt

$$\bar{l} = \begin{matrix} \kappa-1 \\ -\kappa \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \kappa > 0 \\ \kappa < 0 \end{matrix} \quad \text{A-14}$$

und

$$l - \bar{l} = S_{\kappa} = \frac{\kappa}{|\kappa|} \quad \text{A-15}$$

$$j = l - \frac{1}{2} S_{\kappa} \quad \text{A-16}$$

Wir sehen, daß der Bahndrehimpuls l im 4-er Spinor A-10 keine gute Quantenzahl ist. Das rührt von der Spin-Bahnkopplung in der Diracgleichung her.

Für die Radialgleichungen erhält man mit $\sigma_{\kappa} \chi_{\kappa}^{\mu} = -\chi_{-\kappa}^{\mu}$:

$$\frac{df}{dr} = \frac{\kappa-1}{r} f - \frac{W-mc^2-V}{\hbar c} g$$

$$\frac{dg}{dr} = \frac{(W-V+mc^2)}{\hbar c} f - \frac{\kappa+1}{r} g \quad \text{A-17}$$

Oft benutzt man auch

$$u = r g$$

$$v = r f$$

A-18

Dann werden die Radialgleichungen

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{r} & \frac{W+mc^2-V}{\hbar c} \\ -\frac{W-mc^2-V}{\hbar c} & \frac{\kappa}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

A-19

Im kräftefreien Fall $V \equiv 0$ lautet die Lösung

$$u = A r j_\ell(\kappa r)$$

A-20

$$v = A S_\kappa \frac{\kappa r}{W+mc^2} j_{\ell'}(\kappa r)$$

wobei A eine Normalisierungskonstante und j_ℓ die sphärische Besselfunktion ist. Eine Entwicklung der ebenen Welle A-5 in Kugelwellen erhält man mit

$$\psi^m = \sum_{\kappa \mu} a_{\kappa \mu} \psi_{\kappa}^{\mu}$$

und

$$a_{\kappa \mu} = 4\pi i^\ell \left(\frac{W+mc^2}{2W} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\ell, \frac{1}{2}, \mu-m, m | j \mu \right) Y_{\ell}^{\mu-m} \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) \quad \text{A-21}$$

Im Fall des statischen Coulombpotentials

$$V = -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze\hbar c}{r} = -\frac{\xi}{r}$$

A-22

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \xi = Z e^2$$

sind die stehenden Wellen

$$v = - \frac{(W - mc^2)^{\frac{1}{2}} (2\hbar r)^{\gamma} e^{\frac{\pi\gamma}{2}} |\Gamma(\gamma + i\gamma)|}{(\pi \hbar c p c)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\gamma + 1)} \cdot \operatorname{Im} [\exp -i(\hbar r - \eta) \cdot (\gamma + i\gamma) \cdot F(\gamma + 1 + i\gamma, 2\gamma + 1, 2i\hbar r)]$$

$$= - \left(\frac{W - mc^2}{\pi \hbar c p c} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}$$

$$\mu = \frac{(W + mc^2)^{\frac{1}{2}} (2\hbar r)^{\gamma} e^{\frac{\pi\gamma}{2}} |\Gamma(\gamma + i\gamma)|}{(\pi \hbar c p c)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\gamma + 1)} \operatorname{Re} [\exp -i(\hbar r - \eta) \cdot (\gamma + i\gamma) \cdot F(\gamma + 1 + i\gamma, 2\gamma + 1, 2i\hbar r)]$$

$$= \left(\frac{W + mc^2}{\pi \hbar c p c} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}$$

A-23

Dabei bedeuten

$$\gamma = \frac{\xi W}{\hbar c p c} = \frac{Z e^2 W}{p c}, \quad \gamma = + \sqrt{k^2 - \xi^2}$$

$$\eta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma(1 + \frac{\xi}{k} \cdot \frac{mc^2}{W})}{\gamma - \frac{\gamma^2}{k} \cdot \frac{mc^2}{W}} & k > 0 \\ -\frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma(1 + \frac{\xi}{k} \cdot \frac{mc^2}{W})}{\gamma - \frac{\gamma^2}{k} \cdot \frac{mc^2}{W}} & k < 0 \end{cases} \quad \text{für}$$

A-24

und $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ sind reguläre bzw. irreguläre Coulombfunktionen.
Die Asymptotik von A-23 ist durch

$$v = - \left(\frac{W - mc^2}{\pi \hbar c p c} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(kr + \delta_c) + O((kr)^{-1}) \quad \text{A-25}$$

$$u = \left(\frac{W + mc^2}{\pi \hbar c p c} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(kr + \delta_c) + O((kr)^{-1})$$

gegeben. Dabei ist δ_c , die Coulombphase,

$$\delta_c = \eta \ln 2kr - \arg \Gamma(\gamma + i\eta) + \eta + \frac{1}{2} \pi \gamma \quad \text{A-26}$$

Die Funktionen A-23 sind so normiert, daß

$$\int_0^\infty dr r^2 (f_k \bar{f}_k + g_k \bar{g}_k) = \delta(W - W') \quad \text{A-27}$$

gilt. Für die Normalisierung in einer Kugel mit Radius R_1 ($kR \gg 1$) müssen die Wellenfunktionen A-23, A-25 mit $(\pi \hbar c p c / WR)^{\frac{1}{2}}$ multipliziert werden.

Durch Bildung geeigneter Linearkombinationen aus $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ erhält man ein- und auslaufende Kugelwellen:

$$I = \left(\frac{(W + mc^2)^{\frac{1}{2}}}{(\pi \hbar c p c)^{\frac{1}{2}}} \right) (\mathcal{G} - i \mathcal{F}) = \left(\frac{(W + mc^2)^{\frac{1}{2}}}{(W - mc^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{(2kr)^{\gamma} e^{\frac{\pi \eta}{2}} |\Gamma(\gamma + i\eta)|}{(\pi \hbar c p c)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\gamma + 1)}$$

$$\exp i(kr - \eta)(\gamma - i\eta) F^*(\gamma + 1 + i\eta, 2\gamma + 1, 2ikr) \quad \text{A-28}$$

$$\propto \left(\frac{(W + mc^2)^{\frac{1}{2}}}{(W - mc^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{(\pi \hbar c p c)^{\frac{1}{2}}} \exp -i(kr + \delta_c)$$

$$O = \begin{pmatrix} -\left(\frac{W+mc^2}{\pi \hbar c p c}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{W-mc^2}{\pi \hbar c p c}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} (\mathcal{Y} + i \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -(W+mc^2)^{\frac{1}{2}} \\ (W-mc^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \frac{(2\hbar r)^{\gamma} e^{\frac{\pi \hbar r}{2}} |\Gamma(\gamma + i\gamma)|}{(\pi \hbar c p c)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\gamma + 1)}$$

$$\exp -i(\hbar r - \eta)(\gamma + i\gamma) F(\gamma + 1 + i\gamma, 2\gamma + 1, 2i\hbar r)$$

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} -(W+mc^2)^{\frac{1}{2}} \\ (W-mc^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{(\pi \hbar c p c)^{\frac{1}{2}}} \exp i(\hbar r + \delta_c)$$

Anhang B

Die elektromagnetische Wechselwirkung und ihre Matrixelemente¹⁴⁾

Die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron ist

$$H_{\text{int}} = \int d\tau_N \left[\rho_N \phi_e^{\text{ret}}(\underline{r}_N) - \frac{1}{c} \underline{j}_N \cdot \underline{A}_e^{\text{ret}}(\underline{r}_N) \right] \quad \text{B-1}$$

ϕ_e^{ret} und $\underline{A}_e^{\text{ret}}$ sind die durch das Elektron am Kernort erzeugten Potentiale. Mit

$$\underline{j}_e(\underline{r}) = \underline{j}_e(\underline{r}_e) \delta(\underline{r} - \underline{r}_e)$$

B-2

$$\rho_e(\underline{r}) = \rho_e(\underline{r}_e) \delta(\underline{r} - \underline{r}_e)$$

ist bei harmonischer Zeitabhängigkeit

$$H_{\text{int}} = \int d\tau_N \left\{ \rho_N(\underline{r}_N) \rho_e(\underline{r}_e) - \frac{1}{c^2} \underline{j}_N \cdot \underline{j}_e \right\} \frac{e^{ik|\underline{r}_N - \underline{r}_e|}}{|\underline{r}_N - \underline{r}_e|} \quad \text{B-3}$$

$$K = \frac{\Delta E}{\hbar c}$$

Für die Greensche Funktion

$$g = \frac{e^{ik|\underline{r}_N - \underline{r}_e|}}{|\underline{r}_N - \underline{r}_e|} \quad \text{B-4}$$

gilt die Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$g = \frac{e^{ik|\underline{r}_N - \underline{r}_e|}}{|\underline{r}_N - \underline{r}_e|} = 4\pi i K \sum_{L,m} j_L(Kr_e) h_L^{(1)}(Kr_N) Y_{L,m}^*(\hat{r}_N) Y_{L,m}(\hat{r}_e)$$

B-5

Mit Hilfe der sphärischen Einheitsvektoren

$$\underline{\underline{\xi}}_{-1} = 2^{-\frac{1}{2}} (\underline{\underline{e}}_x - i \underline{\underline{e}}_y)$$

$$\underline{\underline{\xi}}_0 = \underline{\underline{e}}_z$$

$$\underline{\underline{\xi}}_1 = -2^{-\frac{1}{2}} (\underline{\underline{e}}_x + i \underline{\underline{e}}_y)$$

B-6

und der Einheitsdyade

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} = \sum_m (-1)^m \underline{\underline{\xi}}_m \underline{\underline{\xi}}_{-m}$$

kann man das Produkt $\underline{\underline{j}}_e \cdot \underline{\underline{j}}_N$ schreiben als

$$\underline{\underline{j}}_e \cdot \underline{\underline{j}}_N = \underline{\underline{j}}_e \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{j}}_N$$

B-7

Man kann dann die dyadische Greensche Funktion $\underline{\underline{g}} = \underline{\underline{j}} \overset{\circ}{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{j}}$ einführen und diese nach Vektorpotentialen entwickeln:

$$\underline{\underline{g}} = \sum_{L,m,\tau} A_{L,m}^{\{\underline{\underline{I}}\}}(\tau, r_s, \vartheta_s, \varphi_s) A_{L,m}^{\{\underline{\underline{R}}\}*}(\tau, r_N, \vartheta_N, \varphi_N) \quad \text{B-8}$$

τ bezeichnet die Art des Potentials:

a) $\tau = m$, magnetisches Vektorpotential

$$A_{L,m}(m) = f_L(kr) \underline{\underline{T}}_{L,L}^m$$

B-9

b) $\tau = e$, elektrisches Vektorpotential

$$A_{L,m}(e) = -\frac{1}{K} \nabla \times (f_L \underline{\underline{T}}_{L,L}^m)$$

$$= -\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} f_{L+1} \underline{\underline{T}}_{L,L+1}^m + \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} f_L \underline{\underline{T}}_{L,L-1}^m$$

B-10

c) $\tau = l$, longitudinales Vektorpotential

$$A_{L,m}(l) = \frac{1}{K} \nabla (\underline{\underline{f}}_L \underline{\underline{Y}}_{L,m}) =$$

$$= \left(\frac{L+1}{2L+1} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_{L+1} \tilde{T}_{L,L+1}^m + \left(\frac{L}{2L+1} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_{L-1} \tilde{T}_{L,L-1}^m \quad \text{B-11}$$

$\tilde{T}_{J,L}^m$ ist ein Tensor vom Rang J

$$\tilde{T}_{J,L}^m = \sum_{\mu} (L, 1, m-\mu, \mu | J, m) Y_{L,m-\mu}(\hat{r}) \xi_{\mu} \quad \text{B-12}$$

In B-8 sind je nach dem oberen Index $\{I\}$ (=irregulär) oder $\{R\}$ (=regulär) in den Vektorpotentialen $A_{L,m}^{\{I\}}$ die sphärischen Hankelfunktionen 1. Art, in den $A_{L,m}^{\{R\}}$ die sphärischen Besselfunktionen einzusetzen. Die Schreibweise γ_{ν}, γ_e bedeutet, daß jeweils das größere von ν, e in die Hankelfunktionen, das kleinere in die Besselfunktionen einzusetzen ist.

Man setzt nun B-9 bis B-12 in B-8 ein und bildet die Matrixelemente

$$\langle f | H_{int} | i \rangle$$

wobei

$$|f\rangle = |\gamma_f^N \gamma_f^e\rangle$$

$$|i\rangle = |\gamma_i^N \gamma_i^e\rangle$$

die Wellenfunktionen von Kern und Elektron im Anfangs- und Endzustand bedeuten. Nach einer partiellen Integration des Terms $\tau = \ell$ und unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichungen

$$\langle \gamma_f^N | \nabla_{\tilde{r}} j_N | \gamma_i^N \rangle = i k c \langle \gamma_f^N | g_N | \gamma_i^N \rangle$$

und

B-13

$$\nabla_{\tilde{r}} (\gamma_f^e \cdot j_e \gamma_i^e) = -i k c \gamma_f^e \cdot g_e \gamma_i^e$$

kann man zeigen, daß sich der longitudinale Anteil bis auf den Term mit $L=0$ gegen den gesamten Ladungsanteil weghebt. Es verbleibt nur ein Monopolterm

$$4\pi \langle f | \int d\tau_N \tilde{r}^{-1} g_N g_e \gamma_{00}^* \gamma_{00} | i \rangle$$

Im ganzen gilt also

$$\begin{aligned}
 \langle + | H_{int} | i \rangle &= \langle \psi_f^N | \int dr_e r_e^2 (\psi_f^e | \rho_e | \psi_i^e) \left\{ \int_0^{r_e} dr_N r_N^2 \right. \\
 &\quad \left. \int d\Omega_N \rho_N r_e^{-1} + \int_{r_e}^{\infty} dr_N r_N^2 \int d\Omega_N \rho_N r_N^{-1} \right\} | \psi_i^N \rangle \\
 &= \frac{4\pi i K}{c^2} \sum_{L,m} \langle \psi_f^N | \int dr_e r_e^2 \left\{ \int_0^{r_e} dr_N r_N^2 \int d\Omega_N j_N \left[-\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. j_{L+1}(kr_N) T_{L,L+1}^{m*}(\hat{r}_N) + \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{L-1}(kr_N) T_{L,L-1}^{m*}(\hat{r}_N) \right] (\psi_f^e | \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. j_e \left[-\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} h_{L+1}^{(1)}(kr_e) T_{L,L+1}^m(\hat{r}_e) + \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} h_{L-1}^{(1)}(kr_e) T_{L,L-1}^m(\hat{r}_e) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. | \psi_i^e \rangle + \int_{r_e}^{\infty} dr_N r_N^2 \int d\Omega_N j_N \left[-\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} h_{L+1}^{(1)}(kr_N) T_{L,L+1}^{m*}(\hat{r}_N) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} h_{L-1}^{(1)}(kr_N) T_{L,L-1}^{m*}(\hat{r}_N) \right] (\psi_f^e | j_e \left[-\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{L+1}(kr_e) T_{L,L+1}^m(\hat{r}_e) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{L-1}(kr_e) T_{L,L-1}^m(\hat{r}_e) | \psi_i^e \rangle \right\} | \psi_i^N \rangle \\
 &= \frac{4\pi i K}{c^2} \sum_{L,m} \langle \psi_f^N | \int dr_e r_e^2 \left\{ \int_0^{r_e} dr_N r_N^2 \int d\Omega_N j_N j_L(kr_N) \right. \\
 &\quad \left. T_{L,L}^{m*}(\hat{r}_N) (\psi_f^e | j_e h_L^{(1)}(kr_e) T_{L,L}^m(\hat{r}_e) | \psi_i^e \rangle + \int_{r_e}^{\infty} dr_N r_N^2 \right. \\
 &\quad \left. \int d\Omega_N j_N h_L^{(1)}(kr_N) T_{L,L}^{m*}(\hat{r}_N) (\psi_f^e | j_e j_L(kr_e) T_{L,L}^m(\hat{r}_e) \right. \\
 &\quad \left. | \psi_i^e \rangle \right\} | \psi_i^N \rangle
 \end{aligned}$$

Die runden Klammern an den Elektronenmatrixelementen bedeuten dabei, daß Winkelintegrationen auszuführen sind.

Für die Wellenfunktionen gilt (IV-1-2)

$$|\psi^v \psi^e\rangle = \sum_{\mu} (j, J, \mu, I, I) \begin{pmatrix} g_{\mu} \chi_{\mu}^{\mu} \\ i f_{\mu} \chi_{-\mu}^{\mu} \end{pmatrix} |x, J, I, \mu\rangle$$

und der Stromoperator für das Elektron ist

$$\underline{j}_e = -e c \underline{\alpha} = -e c \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Wir notieren noch einige Formeln zur Auswertung von Matrixelementen von sphärischen Tensoren¹⁵⁾

Für einen sphärischen Tensor vom Rang k gilt das Wigner-Eckart-Theorem

$$\begin{aligned} \langle J', M' | T_{\kappa}^{(k)} | J, M \rangle &= (-)^{J'-M'} \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & \kappa & M \end{pmatrix} \langle J' || T^{(k)} || J \rangle \\ &= (2J'+1)^{-\frac{1}{2}} \langle J, k, M, \kappa | J', M' \rangle \langle J' || T^{(k)} || J \rangle \end{aligned} \quad \text{B-14}$$

wobei das reduzierte Matrixelement $\langle J' || T^{(k)} || J \rangle$ von den magnetischen Quantenzahlen nicht mehr abhängt.

In den Elektronenmatrixelementen können wir die Produkte $\underline{\sigma} \cdot \underline{T}$ als Tensorprodukte schreiben:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{T}_{L, L+1}^m = [\underline{\sigma} \times \underline{Y}_{L+1}]_m^{(L)} \quad \text{B-15}$$

und es gilt für die Matrixelemente des elektrischen Anteils

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\mu}^{\mu} | \underline{\sigma} \cdot \underline{T}_{L, L+1}^m | \chi_{-\mu}^{\mu} \rangle &= (2J'+1)^{-\frac{1}{2}} \langle j, L, \mu, m | j', \mu' \rangle \cdot \langle \chi_{\mu}^{\mu} || [\underline{\sigma} \times \underline{Y}_{L+1}]^{(L)} || \chi_{-\mu}^{\mu} \rangle \\ &= \langle j, L, \mu, m | j', \mu' \rangle [(2j+1)(2L+1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j' & \frac{1}{2} & j \\ \mu' & \frac{1}{2} & \mu \\ L+1 & 1 & L \end{Bmatrix} \left\{ \langle \frac{1}{2} || \underline{\sigma} || \frac{1}{2} \rangle \langle e' || \underline{Y}_{L+1} || \bar{e} \rangle \right\} \end{aligned}$$

$$= (j, L, \mu, m | j', \mu') \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\ell'} \left[(2j+1)(2L+1)(2\ell'+1)(2(L\pm 1)+1)(2\bar{\ell}+1) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} \ell' & \frac{1}{2} & j' \\ \bar{\ell} & \frac{1}{2} & j \\ L\pm 1 & 1 & L \end{array} \right\} \frac{1}{2} (1 + (-1)^{e'+L+1+\bar{e}})$$

B-16

Für die Matrixelemente des magnetischen Anteils nutzen wir aus, daß

$$\tilde{T}_{L,L}^m = \frac{\tilde{L}}{(L(L+1))^{\frac{1}{2}}} \tilde{V}_{L,m}$$

gilt, wobei $\tilde{L}$ der Bahndrehimpulsoperator ist. Dann ist

$$\langle \chi_{k'}^{\mu'} | \tilde{\sigma} \tilde{T}_{L,L}^m | \chi_{-k}^{\mu} \rangle = (L(L+1))^{-\frac{1}{2}} \langle \chi_{k'}^{\mu'} | \tilde{\sigma} \cdot (\tilde{L} \tilde{V}_{L,m}) | \chi_{-k}^{\mu} \rangle \\ = (L(L+1))^{-\frac{1}{2}} \left\{ \langle \chi_{k'}^{\mu'} | (\tilde{\sigma} \cdot \tilde{L}) \tilde{V}_{L,m} | \chi_{-k}^{\mu} \rangle - \langle \chi_{k'}^{\mu'} | \tilde{V}_{L,m} (\tilde{\sigma} \cdot \tilde{L}) | \chi_{-k}^{\mu} \rangle \right\} \\ = -(k+k') \langle \chi_{k'}^{\mu'} | \tilde{V}_{L,m} | \chi_{-k}^{\mu} \rangle (L(L+1))^{-\frac{1}{2}} \\ = -(k+k') (L(L+1))^{-\frac{1}{2}} (j, L, \mu, m | j', \mu') (-1)^{j'+\frac{1}{2}}$$

B-17

$$\left[\frac{(2L+1)(2j+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc} j' & L & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \frac{1}{2} (1 + (-1)^{\bar{e}+e'+L})$$

Es tritt nun jeweils eine Summe über vier Clebsch-Gordan Koeffizienten bei der Bildung der Matrixelemente auf:

$$\sum_{\mu, \mu', m} [(2j'+1)(2j+1)]^{-\frac{1}{2}} (j, j, \mu, I_{-j} | I, I) (j', j', \mu', I_{-j'} | I, I) \\ (j, L, I_{-j}, -m | j', I_{-j'}) (j, L, \mu, m | j', \mu') = (-1)^{1-j'-I+j} \left\{ \begin{array}{ccc} j' & j & L \\ j & j' & I \end{array} \right\}$$

B-18

Wir können jetzt das Übergangsmatrixelement aufschreiben als

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = - \frac{4\pi e}{(2J+1)^{\frac{1}{2}}} \int dr_e r_e^2 (f_{2,k} f_{2,k} + g_{2,k} g_{2,k})$$

$$\langle \alpha', J, 0 \| \int_0^{r_2} dr_N r_N^2 r_e^{-1} p_N + \int_{r_2}^{\infty} dr_N r_N^2 r_N^{-1} p_N \| \alpha, J \rangle$$

$$+ \frac{2\pi^{\frac{1}{2}} i K e}{c^2} (-1)^{1-J'-I+J+L'} [6(2J+1)(2J'+1)]^{\frac{1}{2}} \sum_L \left\{ \begin{matrix} J' & J & L \\ J & J' & I \end{matrix} \right\} (2L+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} (1 + (-1)^{L'+L+L'}) \int dr_e r_e^2 \left\{ \int_0^{r_2} dr_N r_N^2 [-L^{\frac{1}{2}} \langle \alpha', J' \| (j_N \underline{T}_{L,L+1} \| \alpha, J \rangle j_{L+1}(Kr_e) \right.$$

$$+ (L+1)^{\frac{1}{2}} \langle \alpha', J' \| j_N \cdot \underline{T}_{L,L+1} \| \alpha, J \rangle j_{L-1}(Kr_e) [i g_{2,k} f_{2,k} [2L'+1] \cdot$$

$$(2\bar{L}+1)]^{\frac{1}{2}} [-L^{\frac{1}{2}} h_{L+1}^{(1)}(Kr_e) (2L+3)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} \bar{L}' & \frac{1}{2} & J' \\ \bar{L} & \frac{1}{2} & J \end{matrix} \right\}_{L+1 \ 1 \ L} + (L+1)^{\frac{1}{2}} h_{L-1}^{(1)}(Kr_e)$$

$$(2L-1)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} \bar{L}' & \frac{1}{2} & J' \\ \bar{L} & \frac{1}{2} & J \end{matrix} \right\}_{L-1 \ 1 \ L}] + i f_{2,k} g_{2,k} [(2\bar{L}'+1)(2L+1)]^{\frac{1}{2}}$$

B-19

$$[-L^{\frac{1}{2}} h_{L+1}^{(1)}(Kr_e) (2L+3)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} \bar{L}' & \frac{1}{2} & J' \\ \bar{L} & \frac{1}{2} & J \end{matrix} \right\}_{L+1 \ 1 \ L} + (L+1)^{\frac{1}{2}} h_{L-1}^{(1)}(Kr_e)$$

$$(2L-1)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} \bar{L}' & \frac{1}{2} & J' \\ \bar{L} & \frac{1}{2} & J \end{matrix} \right\}_{L-1 \ 1 \ L}]$$

$$+ \int_{r_e}^{\infty} dr_N r_N^2 \dots \text{dasselbe, nur Rollen von } j \text{ und } h^{(1)} \text{ vertauscht.} \}$$

$$+ \frac{2\pi^{\frac{1}{2}} i K e}{c^2} (-1)^{1-J'-I+J+J'+\frac{1}{2}} [(2J+1)(2J'+1)]^{\frac{1}{2}} \sum_L \left\{ \begin{matrix} J' & J & L \\ J & J' & I \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{1}{2} (1 + (-1)^{l'+l+l'}) \left(\frac{2L+1}{L(L+1)} \right)^2 \begin{pmatrix} j' & l & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \int d\tilde{r}_e r_e^2 i(-g_{j',k'} f_{j,k} - f_{j',k'} g_{j,k}) \left\{ h_L^{(1)}(Kr_e) \int_0^{r_e} dr_N r_N^2 j_L(kr_N) \langle \alpha' j' \| (j_N \cdot \underline{T}_{LL}) \| \alpha j \rangle + j_L(kr_e) \int_{r_e}^{\infty} dr_N r_N^2 h_L^{(1)}(Kr_N) \langle \alpha' j' \| (j_N \cdot \underline{T}_{LL}) \| \alpha j \rangle \right\}$$

Die runden Klammern in den reduzierten Kernmatrixelementen bedeuten, daß dort noch eine Winkelintegration auszuführen ist.

Wir untersuchen noch den Fall vernachlässigter Retardierung. Die Greensche Funktion G (B-3) geht für $K \rightarrow 0$ über in

$$g = \frac{e^{ik|\tilde{r}_N - \tilde{r}_e|}}{|\tilde{r}_N - \tilde{r}_e|} \rightarrow \frac{1}{|\tilde{r}_N - \tilde{r}_e|}$$

und es gilt

$$j_L(Kr_e) h_L^{(1)}(Kr_e) = -\frac{1}{K(2L+1)} \frac{r_e^L}{r_N^{L+1}} \quad \text{B-20}$$

Für die Kernmatrixelemente, wo Kr_N nicht größer als KR_0 werden kann, bedeutet das, daß in der Entwicklung

$$j_L(Kr_N) = \frac{1}{3} Kr_N - \frac{1}{30} (Kr_N)^3 + \dots$$

nur der erste Term übrig bleibt. Bei $\Delta E = 15$ MeV und $R_0 = 5$ fm ist der Fehler also von der Größenordnung

$$\frac{(KR_0)^2}{10} \approx 0.045 = 4.5\%$$

In den Elektronenmatrixelementen kommt es im wesentlichen darauf an, ob die Oszillation der Hankelfunktion gegenüber der Oszillation der Elektronenwellenfunktionen vernachlässigt werden darf, d.h. auf das Verhältnis $\Delta E/E$. Eine Abschätzung mit Hilfe der Bornschen Näherung ³⁾ zeigt, daß die Wirkungsquerschnitte bei Vernachlässigung der Retardierung für einen E1-Übergang vom Grundzustand zur 1⁻ Riesenresonanz bei Er¹⁵⁶

um 2% verfälscht werden, wenn $E = 200 \text{ MeV}$ und der Streuwinkel $\vartheta \leq 120^\circ$ ist.

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichungen B-13 kann man nun zeigen, daß sich für $K=0$ jene beiden Anteile im Übergangsmatrixelement wegheben, die von dem elektrischen und dem longitudinalen Vektorpotential herrühren. Es gilt dann

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = -2\pi^{\frac{1}{2}} e (-1)^{1+J'-I+J+J'+\frac{1}{2}} [(2J'+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_L (2L+1)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} J' & J & L \\ J & J' & I \end{matrix} \right\} \left(\begin{matrix} J' & L & J \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right) \left\{ \int dr_e r_e^2 (f_{2,k'} f_{2,k} + g_{2,k'} g_{2,k}) \right.$$

$$\frac{1}{2} (1 + (-1)^{2'+L+1}) \left[\frac{1}{r_e^{\frac{1}{2}+1}} \int_0^{r_e} dr_N r_N^2 r_N^L \langle 2', J' || (j_N Y_L) || 2, J \rangle + r_e^L \right.$$

$$\left. \int_{r_e}^{\infty} dr_N r_N^2 \frac{1}{r_N^{L+1}} \langle 2', J' || (j_N Y_L) || 2, J \rangle \right]$$

B-20

$$+ (L(L+1))^{-\frac{1}{2}} (k+k') \int dr_e r_e^2 i (g_{2,k'} f_{2,k} + f_{2,k'} g_{2,k}) \left[\frac{1}{r_e^{\frac{1}{2}+1}} \right.$$

$$\left. \int_0^{r_e} dr_N r_N^2 r_N^L \langle 2', J' || (j_N \tilde{T}_{L,L}) || 2, J \rangle + r_e^L \int_{r_e}^{\infty} dr_N r_N^2 \frac{1}{r_N^{L+1}} \right.$$

$$\left. \langle 2', J' || (j_N \tilde{T}_{L,L}) || 2, J \rangle \right] \frac{1}{2} (1 + (-1)^{2'+L+1+e}) \}$$

Es sei noch bemerkt, daß in der Eigenkanaltheorie die Radialintegrale nur bis zum Abschneideradius R erstreckt werden.

Erklärung zu den Tabellen:

Die Streuphasen und Matrixelemente sind für einen Übergang vom Grundzustand in einen 2^+ Vibrationszustand bei $Z=26$ ausgerechnet worden. Für die statische Ladungsverteilung wurde eine Fermiverteilung mit $c=4.05$ fm, $t=2.5$ fm angenommen, für die Übergangsladungsverteilung eine δ -Verteilung bei $R_{tr}=5.2$ fm

Tab. I Potentialstreuphasen für $W_0 = 200$ MeV und $W_1 = 195$ MeV

κ	1	2	3	4	5	6
$\delta_{c,\kappa}$	-0.1542	-0.1761	-0.2132	-0.2578	-0.2994	-0.3348
$\delta_{n,\kappa}$	-0.1498	-0.1729	-0.2117	-0.2573	-0.2993	-0.3348

κ	7	8	9	10	11	12
$\delta_{c,\kappa}$	-0.3648	-0.3907	-0.4135	-0.4339	-0.4522	-0.4690
$\delta_{n,\kappa}$	-0.3648	-0.3907	-0.4135	-0.4339	-0.4522	-0.4690

Tab.II Radialmatrixelemente (IV-2-1)

$$\langle f | H_{int} | i \rangle_{rad} [MeV]$$

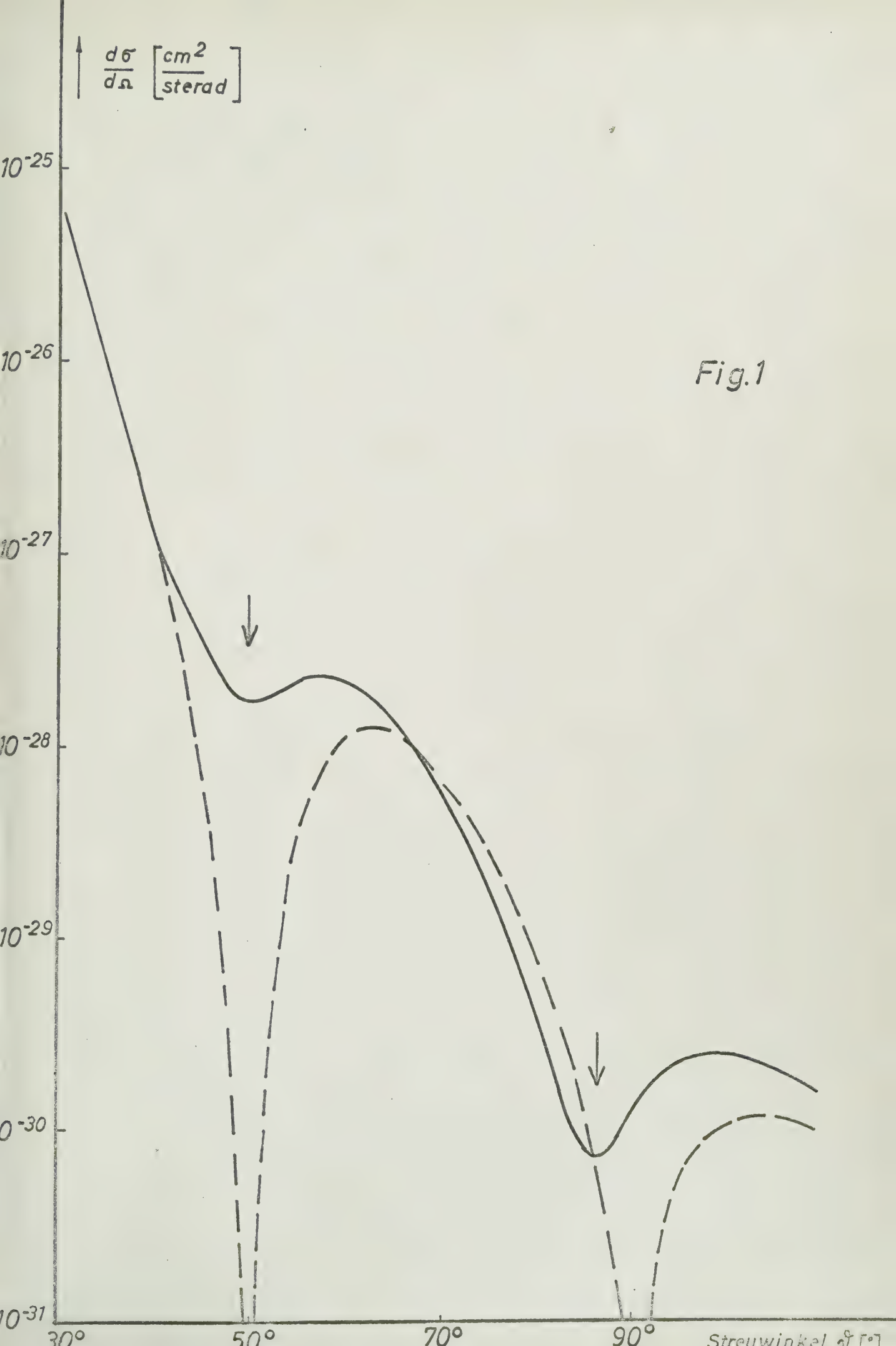
k_i	k_f	$W_0 = 200 \text{ MeV}$	$W_1 = 195 \text{ MeV}$
1	-2	$3.71 \cdot 10^{-4}$	$3.88 \cdot 10^{-4}$
1	3	$-2.95 \cdot 10^{-4}$	$-3.06 \cdot 10^{-4}$
2	2	$4.15 \cdot 10^{-4}$	$4.22 \cdot 10^{-4}$
2	-3	$3.39 \cdot 10^{-4}$	$3.51 \cdot 10^{-4}$
2	4	$-1.62 \cdot 10^{-4}$	$-1.50 \cdot 10^{-4}$
3	3	$4.59 \cdot 10^{-4}$	$5.03 \cdot 10^{-4}$
3	-4	$2.86 \cdot 10^{-4}$	$2.94 \cdot 10^{-4}$
3	5	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$2.87 \cdot 10^{-5}$
4	4	$5.25 \cdot 10^{-4}$	$5.52 \cdot 10^{-4}$
4	-5	$2.14 \cdot 10^{-4}$	$2.16 \cdot 10^{-4}$
4	6	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$1.13 \cdot 10^{-4}$
5	5	$4.80 \cdot 10^{-4}$	$4.90 \cdot 10^{-4}$
5	-6	$1.53 \cdot 10^{-4}$	$1.53 \cdot 10^{-4}$
5	7	$1.12 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$
6	6	$3.80 \cdot 10^{-4}$	$3.83 \cdot 10^{-4}$
6	-7	$1.10 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$
6	8	$8.97 \cdot 10^{-5}$	$8.99 \cdot 10^{-5}$
7	7	$2.86 \cdot 10^{-4}$	$2.86 \cdot 10^{-4}$
7	-8	$8.20 \cdot 10^{-5}$	$8.20 \cdot 10^{-5}$
7	9	$7.00 \cdot 10^{-5}$	$7.00 \cdot 10^{-5}$
15	15	$5.97 \cdot 10^{-5}$	$5.97 \cdot 10^{-5}$
15	-16	$1.83 \cdot 10^{-5}$	$1.83 \cdot 10^{-5}$
15	17	$1.72 \cdot 10^{-5}$	$1.72 \cdot 10^{-5}$
25	25	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$
9	-26	$6.79 \cdot 10^{-6}$	$6.79 \cdot 10^{-5}$
25	27	$6.45 \cdot 10^{-6}$	$6.45 \cdot 10^{-5}$

Erklärung zu den Figuren:

Fig.1 Vergleich¹⁾ der differentiellen Wirkungsquerschnitte in Partialwellenanalyse (DWBA) - ausgezogene Linie - und in Bornscher Näherung (BA) - gestrichelte Linie - für die elastische Streuung von Elektronen an Kupfer. $E = 150$ MeV, homogene Ladungsverteilung mit $kR_0 = 5.4$. Die Pfeile bezeichnen die Stellen, an denen sich die Dispersionseffekte bemerkbar machen sollen⁶⁾.

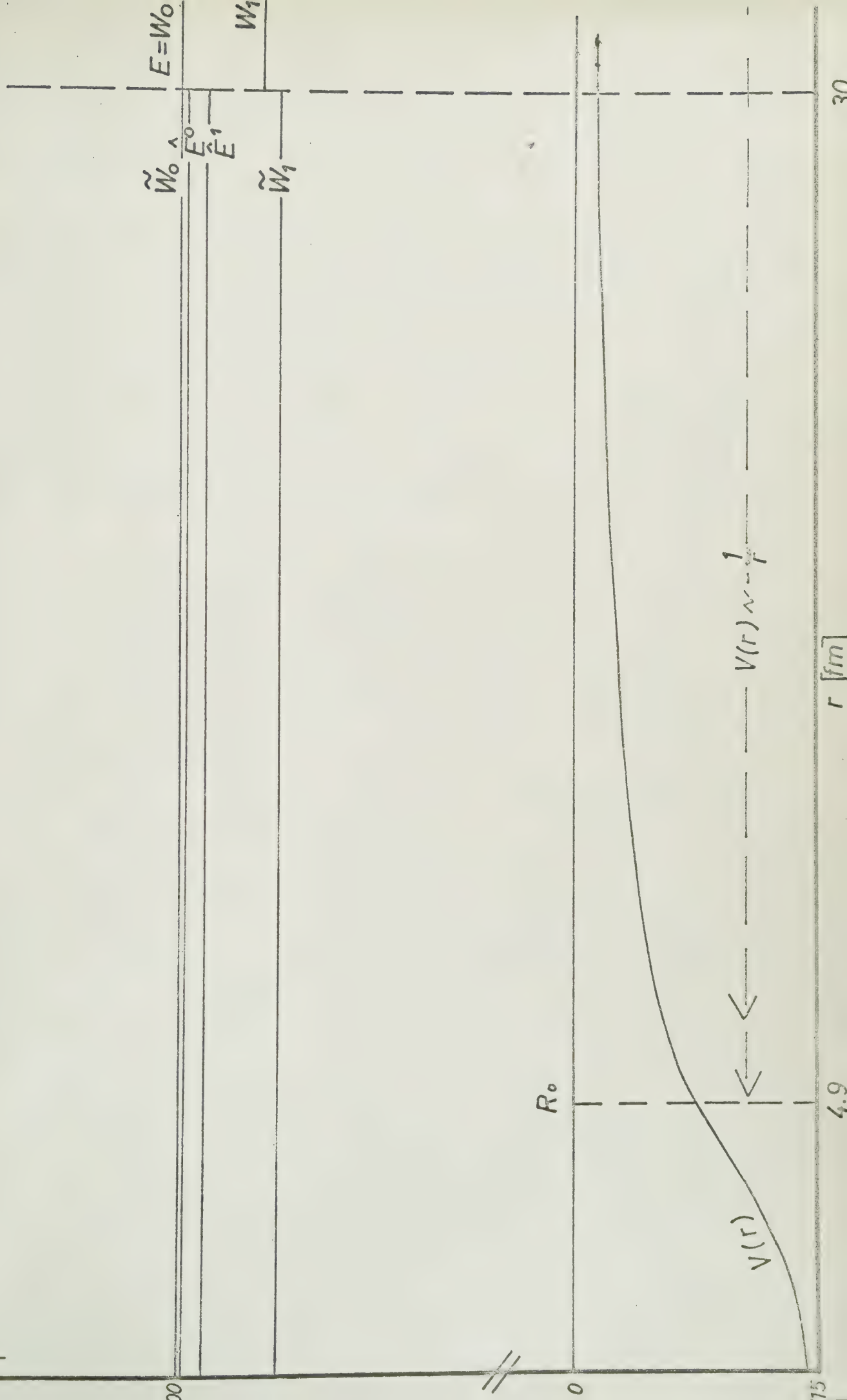
Fig.2 Zur Konstruktion der S-Matrix

Betrachtet werden 2 Kanäle mit den Elektronenenergien $W_0 = 200$ MeV und $W_1 = 195$ MeV. Der Kanal W_0 wird direkt nach innen fortgesetzt (Eigenphase = Potentialstreu-phase). Im anderen Kanal folgt aus der Randbedingung eine innere Elektronenenergie $\tilde{W}_1 \neq W_1$. Durch Diagonalisierung erhält man die inneren Gesamtenergien $\hat{E}^0, \hat{E}^1$. Durch die Phasenrenormierung wird dann $\hat{E}^0 = E$ erreicht. In Wirklichkeit sind die Differenzen zwischen den Energien W_1 und $\tilde{W}_1$ sowie $E, \hat{W}_0, \hat{E}^0, \hat{E}^1$ von der Größenordnung 0.1 MeV.



$E(\text{MeV})$

Fig. 2



Literatur:

- 1) D.R.Yennie, D.G.Ravenhall, R.N.Wilson, Phys.Rev.95,500(1954)
- 2) T.A.Griffy, D.S.Onley, J.T.Reynolds, L.C.Biedenharn, Phys.Rev. 128, 833 (1962)
- 3) F.Scheck, Nucl.Phys. 77, 577 (1965)
- 4) D.Drechsel, Nucl.Phys.78, 465 (1966); Z.f.Physik 192,81(1966)
- 5) A.Bottino, G.Ciochetti, A.Molinari Nucl.Phys.89,192 (1966)
- 6) G.H.Rawitscher, preprint, Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg (1966)
- 7) M.Danos, W.Greiner, Phys.Rev.146, 708 (1966)
- 8) H.G.Wahsweiler, preprint Universität Frankfurt (1967)
- 9) G.A.Peterson, J.F.Ziegler, R.B.Clark, Phys.Lett.17,320(1965)
- 10) L.I.Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill Book Comp.
- 11) M.E.Rose, Relativistic Electron Theory, John Wiley a.Sons, New York (1961)
- 12) G.Breit im Handbuch der Physik, Vol XLI/1, ed.S.Flügge Springer Verlag Berlin (1959)
- 13) J.D.Walecka, Phys.Rev.126, 653 (1962)
- 14) M.E.Rose, Multipole Fields, John Wiley a.Sons, New York (1957)
- 15) A.de-Shalit, I.Talmi, Nuclear Shell Theory, Academic Press, New York (1963)

Meinem Lehrer, Herrn Professor W.Greiner bin ich zu großem Dank verpflichtet für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für viele klärende Diskussionen und Hinweise.

Herrn Dr.D.Drechsel danke ich für wertvolle Ratschläge und die Überlassung seiner Programme zur Elektronenstreuung.

Bei Frl. S.Springwald bedanke ich mich für die Hilfe bei der Anfertigung des Manuskripts, sowie beim Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt für die Rechenzeit, die mir dort zur Verfügung gestellt wurde.

Lebenslauf

Am 21.Mai 1941 wurde ich in Breslau als Sohn des Kaufmanns Konrad Toepffer und seiner Frau Brigitte, geb.v.Treutler geboren. 1945 ließ sich meine Familie in Ahrensburg/Holstein nieder. Dort besuchte ich ab Ostern 1947 die Volksschule , ab Ostern 1951 das Gymnasium, an dem ich 1960 meine Reifeprüfung ablegte. Im Sommersemester 1960 begann ich mit dem Studium der Physik an der Universität Hamburg. Nach dem Vordiplom im WS 1962/63 setzte ich mein Studium in Freiburg/Brsg. fort. Dort fertigte ich unter Leitung von Prof.H.Marschall meine Diplomarbeit an und bestand im Februar 1966 die Diplomprüfung. Seit März 1966 bin ich am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt/M tätig, um bei Prof.Greiner zu promovieren. Am 1.Sept.1966 übernahm ich die Verwaltung einer Assistentenstelle. Meine akademischen Lehrer waren:

Prof.H.Neuert, Prof.E.Artin, Prof.H.Lehmann	in Hamburg,
Prof.H.Marschall, Prof.Th.Schmidt	in Freiburg und
Prof.W.Greiner	in Frankfurt/M

